УДК 513.83

Р. С. Линичук

О размерности гиперпространств

Изучение различных видов непрерывностей многозначных отображений топологических пространств приводит к исследованиям пространств непустых подмножеств (гиперпространств) топологических пространств. Важное место среди гиперпространств занимает λX-пространство непустых подмножеств топологического пространства X с полунепрерывной снизу топологией (так называемой λ-топологией). λ-топология определена в [1], с. 183. Ее исследованию посвящены работы [2—5]. Данная заметка посвящена изучению размерностных и весовых характеристик λ-гиперпространств.

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{P}(X)$ — семейство всех его непустых подмножеств. Пара $(\mathfrak{P}(X), \xi)$, где ξ—некоторая топология на $\mathfrak{P}(X)$, называется ξ-гиперпространством пространства X. Если $U \subseteq X$, то полагаем

$$\Delta(U) \equiv \{(A) \in \mathfrak{P}(X) \mid A \cap U \neq \varnothing\}.$$

Записи (A) и A равносильны: скобки подчеркивают, что подмножество $A \subseteq X$ выступает в качестве точки множества $\mathfrak{P}(X)$. Как известно, всевозможные подсемейства вида $\Delta(U)$ формируют открытый предбазис λ-топологии на множестве $\mathfrak{P}(X)$, когда U пробегает все открытые подмножества пространства X (см. [1], с. 183, а также [4]). Так заданный предбазис λ-топологии впредь будем называть стандартным. В [4] отмечено следующее в дальнейшем полезное свойство пространства λX.

Предложение 1. *Всякое непустое открытое в λX множество содержит точку $(X) \in \mathfrak{P}(X)$.*

Определение 1. Покрытие $\omega = \{U\}$ пространства X называется неприводимым, если система, полученная из ω путем отбрасывания любого ее элемента, не является покрытием пространства X.

Определение 2. Пространство X называется неприводимым, если для любого $n \in N$ (здесь и в дальнейшем N — натуральный ряд) существует неприводимое открытое покрытие этого пространства из n элементов.

Очевидным является следующее утверждение.

Предложение 2. *Конечное покрытие $\omega = \{U_1, \ldots, U_s\}$ топологического пространства X является неприводимым тогда и только тогда, когда существует $\{x_1, \ldots, x_s\}$ — такой набор точек пространства X из s штук, что $x_i \in U_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ и $x_i \notin U_j$ при $j \neq i$.*

Предложение 3. *Пространство X неприводимо тогда и только тогда, когда для любого $n \in N$ существует неприводимое открытое покрытие пространства λX из n элементов стандартной предбазы этого пространства.*

Доказательство. Необходимость. Пусть для всякого $n \in N$ существует неприводимое открытое покрытие пространства X из n элементов: $\omega = \{U_1, ..., U_n\}$. Тогда, в силу предложения 2, существует такой набор $\{x_1, ..., x_n\}$ точек пространства X, что $x_i \in U_i$ и $x_i \notin U_j$ при $j \neq i$. Рассмотрим систему $\hat{\omega} = \{\Delta(U_1), ..., \Delta(U_n)\}$. Легко видеть, что $\hat{\omega}$ — покрытие пространства λX. Действительно, если $(A) \in \lambda X$, тогда существует $i \in \{1, ..., n\}$ такой индекс, что $A \cap U_i \neq \varnothing$, а значит, $(A) \in \Delta(U_i)$. Но $\hat{\omega}$ — также и неприводимое покрытие пространства λX. Это следует из того, что набор $\{(x_1), ..., (x_n)\}$ малых* точек пространства λX такой, что $(x_i) \in \Delta(U_i)$ и $(x_i) \notin \Delta(U_j)$ при $i \neq j$, а также из предложения 2.

Достаточность. Пусть обратно $\hat{\omega} = \{\Delta(U_1), \ldots, \Delta(U_n)\}$ — неприводимое покрытие пространства λX. Рассмотрим систему открытых в X множеств $\omega = \{U_1, ..., U_n\}$. Ясно, что ω — покрытие пространства X. Действительно, если это не так, то нашлась бы точка $x_0 \in X$ такая, что $x_0 \notin U_i$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Но тогда малая точка $(x_0) \in \lambda X$ пространства λX не принадлежала бы ни одному из элементов системы $\hat{\omega}$, что противоречило бы тому, что $\hat{\omega}$ — покрытие пространства λX. Покажем далее, что ω — неприводимое покрытие пространства X. Действительно, так как $\hat{\omega}$ неприводимо, то, в силу предложения 2, существует такой набор $\{(A_1), ..., (A_n)\}$ точек пространства λX, что $(A_i) \in \Delta(U_i)$ для любого $i \in \{1, ..., n\}$ и $(A_i) \notin \Delta(U_j)$ при $j \neq i$. Это значит, что $A_i \cap U_i \neq \varnothing$ и $A_i \cap U_j = \varnothing$ при $j \neq i$. Следовательно, $A_i \subseteq X \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j \subseteq U_i$. Выберем $x_i \in A_i$ для всех $i \in \{1, ..., n\}$. Тогда набор $\{x_1, ..., x_n\}$ точек пространства X обладает таким свойством, что $x_i \in U_i$ и $x_i \notin U_j$ при $i \neq j$, и значит, в силу предложения 2, покрытие ω неприводимо и, стало быть, в силу произвола в выборе $n \in N$, пространство X неприводимо. Утверждение доказано.

Теорема. *Пусть X—неприводимое пространство. Тогда* $\dim \lambda X = \infty$**.

Доказательство. Пусть n — произвольное натуральное число и $\omega = \{U_1, ..., U_{n+2}\}$ — неприводимое открытое покрытие пространства X из $n+2$ элементов. Тогда, в силу предложения 3, система $\hat{\omega} = \{\Delta(U_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n+2\}$ — неприводимое открытое покрытие пространства λX. Далее, в силу предложения 1, кратность любого открытого покрытия пространства λX равна числу элементов этого покрытия. Так как любое вписанное в $\hat{\omega}$ открытое покрытие пространства λX очевидно имеет мощность больше или равно $n+2$ (в силу неприводимости покрытия $\hat{\omega}$), то можем утверждать, что для любого натурального числа n существует такое конечное открытое покрытие пространства λX, что всякое вписанное в него открытое покрытие этого пространства имеет кратность больше $n+1$, т. е. $\dim \lambda X = \infty$, что и требовалось доказать.

Выясним вопрос о том, насколько широк класс топологических пространств, λ-гиперпространства которых бесконечномерны (этот класс обозначим через $\mathfrak{H}$).

Предложение 4. *Пусть X — топологическое пространство (вообще говоря, не T_1) и в X существует счетное подмножество D попарно различных замкнутых (как одноточечные подмножества) точек. Тогда X неприводимо.*

Доказательство. Пусть n — произвольное натуральное число. Рассмотрим $D_1 \equiv \{x_1, ..., x_n\} \subseteq D$ — подмножество из n элементов. Полагаем по определению: $(x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_n) \equiv D_1 \setminus \{x_i\}$, где $i \in \{1, ..., n\}$ — фикси-

* Точка $(A) \in \lambda X$ пространства λX называется малой, если A — одноточечное подмножество пространства X.

** По поводу бесконечномерности пространств см., например, [6], с. 166.

рованный индекс. Легко видеть, что система открытых множеств пространства X

$$\sigma \equiv \{U_{x_i} \mid U_{x_i} \equiv X \setminus (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

— неприводимое покрытие пространства X из n элементов (действительно, набор $(x_1, \ldots, x_n)$ точек пространства X как раз такой, как в формулировке предложения 2, и поэтому σ — неприводимое покрытие). Следовательно, в силу произвола в выборе n, пространство X неприводимо. Утверждение доказано.

Предложение 5. *T_1-пространство X неприводимо тогда и только тогда, когда оно имеет бесконечную мощность.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X конечно. Тогда X не может быть неприводимым, в силу самого определения неприводимости пространства. Действительно, если бы X было неприводимым, тогда, в силу предложения 2, для всякого $n \in N$ в пространстве X существовал бы набор из n попарно различных точек, что противоречиво.

Достаточность следует из предложения 4. Утверждение доказано.

Таким образом, класс $\mathfrak{H}$ очень широк. Он включает в себя подкласс всех бесконечных T_1-пространств (последний подкласс обозначим через $\mathfrak{G}$).

Рассмотрим далее следующий класс пространств: $\Lambda \equiv \{\lambda X \mid X$ неприводимо$\}$. В силу предложения 3, каждое из пространств класса Λ неприводимо, а поэтому, в силу теоремы, имеем: $\Lambda \subset \mathfrak{H}$. Отметим следующие два свойства класса Λ: 1) Все пространства класса Λ никогда не являются T_1-пространствами. Они, вообще говоря, даже не T_0 (см. по этому поводу, например, [4]). Поэтому $\Lambda \cap \mathfrak{G} = \varnothing$. 2) По запасу пространств класс Λ не меньше, чем класс $\mathfrak{G}$. Это следует из следующего результата, справедливого по отношению к λ-гиперпространствам: пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства λX и λY гомеоморфны. Ввиду этого подкласс $\{\lambda X \mid X$ — бесконечное T_1-пространство$\}$ класса Λ находится во взаимно однозначном соответствии с классом $\mathfrak{G}$.

Замечание. То, что $\Lambda \subset \mathfrak{H}$ (иными словами, что $\dim \lambda(\lambda X) = \infty$, когда X неприводимо), следует и из того, что в этом случае $\dim \lambda X = \infty$ и пространство λX является подпространством своего λ-гиперпространства $\lambda(\lambda X)$.

Дальнейшие результаты этой заметки имеют отношение к весовым характеристикам λ-гиперпространств. Легко проверить следующее утверждение.

Предложение 6. *Если σ — какая угодно открытая база пространства X, тогда семейство $\{\Delta(U) \mid U \in \sigma\}$ образует открытую предбазу пространства λX.*

Напомним далее, что весом топологического пространства Z называется наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью открытой базы пространства Z. Обозначение: wZ.

Предложение 7. *Пусть вес wX пространства X бесконечен. Тогда $w(\lambda X) \leqslant wX$, каково бы ни было пространство X.*

Доказательство. Действительно, это сразу следует из предложения 6 и из определения λ-топологии, поскольку конечных наборов из семейства σ (σ — база пространства X), где $|\sigma| = \tau$ — бесконечное кардинальное число, наберется ровно τ. Теорема доказана.

Как известно, система $\sigma = \{U_\alpha\}$ открытых множеств пространства X называется плотной (В. И. Пономарев) в этом пространстве, если для любого открытого множества $G \subseteq X$ найдется элемент $U_\alpha \in \sigma$ такой, что $U_\alpha \subseteq G$. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью плотной в X системы открытых множеств, называется π-весом пространства X и обозначается: $w_\pi X$.

Рассуждения, аналогичные проведенным в предложениях 6 и 7, доказывают справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 8. *Если* $w_\pi X$ — *бесконечное кардинальное число, тогда* $w_\pi(\lambda X) \leqslant w_\pi X$, *где* X — *произвольное топологическое пространство.*

ЛИТЕРАТУРА

1. К у р а т о в с к и й К. Топология. Т. 1, М., «Мир», 1966. 594 с.
2. M i c h a e l E. Topologies on Spaces of Subsets. — Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **71**, № 1, p. 152—182.
3. F e i c h t i n g e r O s k a r. Properties of the λ-topology. — Lect. Notes Math., 1970, N 171, p. 17—23.
4. Л и н и ч у к Р. С. Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств. Десятая математическая школа, К., Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 308—329.
5. Л и н и ч у к Р. С. О ξ-отображениях топологических пространств. — УМЖ, 1975, **27**, № 6, с. 761—766.
6. А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А. Введение в теорию размерности. М., «Наука», 1973. 575 с.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
17.VI. 1976 г.