УДК 519.44

З. И. Москаленко

Оценка ранга локально компактных разрешимых групп

В работе [1] установлено, что необходимым и достаточным условием конечности ранга локально компактной разрешимой группы является конечность рангов факторов ее произвольного инвариантного разрешимого ряда. В [1] доказана следующая теорема.

Если локально компактная разрешимая группа G содержит инвариантный ряд замкнутых подгрупп длины n с абелевыми факторами, каждый из которых является либо связной группой, компактной или чистой, либо вполне несвязной периодической группой, либо дискретной группой без кручения, и ранг каждого фактора не превосходит r, то ранг группы G не превосходит $3^n 2nr$.

В данной работе уточнена оценка ранга локально компактной разрешимой группы, полученная в [1] (под рангом, как и в [1], понимается специальный ранг группы; ранг топологической группы G обозначим через $r(G)$).

Определение. Инвариантный ряд локально компактной разрешимой группы будем называть R-рядом, если все его факторы абелевы и каждый из них является либо связной группой, компактной или чистой, либо вполне несвязной периодической группой, либо дискретной группой без кручения.

В статье получим оценку ранга локально компактной разрешимой группы через сумму рангов факторов ее произвольного R-ряда: для вполне несвязной группы G ее ранг не превосходит удвоенную сумму рангов факторов R-ряда; для группы G, связная компонента которой G_0 отлична от нуля, $r(G)$ не превосходит утроенную сумму рангов факторов R-ряда.

Следующая лемма уточняет результат леммы 2 из [1].

Лемма 1. *Пусть в локально компактной группе G содержится такая центральная подгруппа H ранга t, дискретная без кручения, что G/H — связная компактная абелева группа размерности r.*

Пусть G_0 — связная компонента группы G, $P(G/G_0)$ — периодическая часть группы G/G_0.

Тогда G — абелева группа, и сумма рангов групп $P(G/G_0)$ и $G/G_0 \diagup P(G/G_0)$ не превосходит t.

Доказательство. В лемме 2 из [1] доказано, что группа G абелева. Вследствие [2] $\dim G = \dim H + \dim G/H = r$, и $\dim G_0 = \dim G = r$. $G = A \times B$, где A — локально компактная группа, в которой периодическая часть открыта, а компонента нуля A_0 компактна. $B \cong D^s$. Пусть P — периодическая часть группы G; $P \subset A$. Положим $T = (P \times B) \cap H$. Оценим ранг группы T. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — произвольное конечное подмножество элементов из T, $M=\{x_1, \dots, x_n\}$. Рассмотрим фактор-группу G/B и образы $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ элементов $x_1, \dots, x_n$ в G/B. При $i=1, \dots, n$ $\tilde{x}_i$ содержится в образе $\tilde{P}$ подгруппы P в G/B. На основании [3] подгруппа $\tilde{N}=\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ компактна. Пусть N — полный прообраз $\tilde{N}$ в G; $N/B \cong \tilde{N}$. Пусть $P_1 = N \cap P$. Легко видеть, что $N=P_1 \times B$. Рассмотрим фактор-группу N/P_1 и образ подгруппы M в N/P_1; $N/P_1 \cong D^s$. Образ подгруппы M в N/P_1 равен $MP_1/P_1 \cong M/M \cap P_1$. M — дискретная группа без кручения, следовательно, $M \cap P_1 = 1$, и группа M изоморфна подгруппе группы D^s, следовательно, $r(M) \leqslant s$. Отсюда $r(T) \leqslant s$.

Определим теперь нижнюю границу ранга группы T. Пусть P_2 — открытая компактная подгруппа в P. Положим $T_1 = (P_2 \times B) \cap H$. T_1 — открытая подгруппа в T, следовательно, $r(T_1) \leqslant r(T)$.

Рассмотрим образ $\varphi(T_1)$ подгруппы T_1 в фактор-группе G/P_2:

$$\varphi(T_1) = \varphi((P_2 \times B) \cap H) = \varphi(P_2 \times B) \cap \varphi(H);$$

$$\varphi(T_1) = T_1P_2/P_2 \cong T_1/T_1 \cap P_2, \ T_1 \cap P_2 = 1,$$

следовательно, $\varphi(T_1) = T_1$. Допустим, что ранг группы T_1 меньше s. Тогда группа $\varphi(P_2 \times B)/\varphi(P_2 \times B) \cap \varphi(H)$ некомпактна.

$$\varphi(P_2 \times B)/\varphi(P_2 \times B) \cap \varphi(H) = BP_2/P_2/BP_2/P_2 \cap HP_2/P_2 \cong BHP_2/HP_2,$$

так как левая и правая части локально компактны и σ-компактны. $BHP_2/HP_2 \subset G/HP_2$. Группа G/HP_2 компактна как фактор-группа группы G/H. Получено противоречие, следовательно, $r(T_1) \geqslant s$. Но тогда $r(T) \geqslant r(T_1) \geqslant s$.

Рассмотрим подгруппу HG_0P. G_0P — открытая подгруппа в G, следовательно, подгруппа HG_0P открыта в G. G/HG_0P — дискретная группа. С другой стороны, G/HG_0P — фактор-группа группы G/H, следовательно, она связна. Отсюда получим $HG_0P = G$

$$G/G_0/P(G/G_0) \cong G/P \times B = HG_0P/P \times B = H(P \times B)/P \times B \cong H/H \cap P \times B.$$

Специальный ранг дискретной абелевой группы без кручения равен ее рангу, определенному в [4], с. 117. $H \cap (P \times B)$ и $H/H \cap (P \times B)$—дискретные группы без кручения, следовательно, $r(H) = r(H \cap (P \times B)) + r(H/H \cap (P \times B))$.

Отсюда $r(H/H \cap (P \times B)) = t - s$, и $r(G/G_0/P(G/G_0)) = t - s$.

Оценим ранг подгруппы $P(G/G_0)$. Очевидно, $P(G/G_0) \cong P(A_0)$.

Вследствие [5] $r(P) = r(A_0) + r(P/A_0)$. $r(A_0) = \dim A_0 = r - s$.

В лемме 2 из [1] доказано, что $r(P) \leqslant r$. Следовательно, $r(P(G/G_0)) = r(P/A_0) = r(P) - r(A_0) \leqslant r - (r - s) = s$. Отсюда $r(G/G_0/P(G/G_0)) + r(P(G/G_0)) \leqslant t - s + s = t$. Лемма доказана.

Следующая лемма уточняет результат леммы 6 из [1]. При ее доказательстве существенно использован метод доказательства леммы 6 из [1].

Лемма 2. *Пусть локально компактная конечномерная разрешимая группа G обладает R-рядом, не содержащим дискретных факторов без кручения: $G = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_p = 1$.*

Положим $r_i = r(A_i/A_{i+1})$, где $i = 0, \dots, p-1$.

Тогда G/G_0 является периодической группой, и ранг фактор-группы G/G_0 не превосходит суммы σ рангов r_i по всем вполне несвязным факторам A_i/A_{i+1}.

Доказательство. Доказательство проведем с помощью индукции по длине τ инвариантного ряда группы G.

При $\tau = 1$ справедливость утверждения очевидна. Предположим, что утверждение справедливо при $\tau \leqslant p - 1$. Докажем, что оно справедливо и при $\tau = p$.

Предположим, что G/A_1 — связная группа. Если группа G связна, то $G = G_0$, $r(G/G_0) = 0$, и утверждение справедливо. Если группа G не связна, то для некоторого l $(1 \leqslant l \leqslant p-1)$ все факторы A_i/A_{i+1} связны при $0 \leqslant i \leqslant l-1$, а A_l/A_{l+1} — вполне несвязная периодическая абелева группа.

Рассмотрим фактор-группу $\tilde{A}_{l-1} = A_{l-1}/A_{l+1}$. Пусть $\tilde{A}_{l-10}$ — связная компонента группы $\tilde{A}_{l-1}$. Вследствие леммы 5 (см. [1]) $\tilde{A}_{l-1}/\tilde{A}_{l-10}$ — группа ранга, не превосходящего r_l, $\tilde{A}_{l-10}$ — связная абелева группа, компактная или чистая. Пусть $\tilde{\tilde{A}}_l$ — некоторый прообраз в G подгруппы $\tilde{A}_{l-10}$. Исключив из ряда подгруппу A_l и включив $\tilde{\tilde{A}}_l$, получим ряд, в котором фактор-группа $A_{l-1}/\tilde{\tilde{A}}_l$ — вполне несвязная абелева периодическая, а фактор-группа $\tilde{\tilde{A}}_l/A_{l+1}$ связна и абелева, причем длина ряда не больше длины p исходного ряда и сумма рангов вполне несвязных периодических факторов не превосходит σ.

Произведя аналогичное преобразование l раз, получаем R-ряд, аналогичный исходному (длины не более p с суммой рангов вполне несвязных периодических факторов не более σ), в котором G/A_1 — периодическая вполне несвязная группа.

В этом случае связная компонента подгруппы A_1 совпадает с G_0. A_1 — группа с R-рядом длины $p-1$. Согласно индукции, A_1/G_0 — вполне несвязная периодическая группа ранга, не превосходящего сумму σ_1 рангов несвязных периодических факторов ряда, содержащегося в A_1.

Вследствие леммы 1 из [3], G/G_0 — периодическая разрешимая группа, и, по теореме 3 из [3], $r(G/G_0) \leqslant r(G/A_1) + r(A_1/G_0) = r(G/A_1) + \sigma_1 \leqslant \sigma$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть G — локально компактная разрешимая группа, $G = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = 1$ — R-ряд группы G, причем сумма рангов вполне несвязных периодических факторов ряда равна p, сумма рангов дискретных факторов без кручения равна k, сумма рангов (размерностей) связных факторов равна d. Тогда ранг $r(G)$ группы G не будет превосходить δ, где*

$$\delta = \begin{cases} 3(p+k+d) & \textit{при } d \neq 0, \\ 2(p+k) & \textit{при } d = 0. \end{cases}$$

Для связной абелевой группы размерность не превосходит ранг.

Вследствие [2] размерность группы G равна сумме размерностей факторов рассматриваемого ряда, следовательно, $\dim G \leqslant d$.

Если группа G дискретна, то, вследствие [6]

$$r(G) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} r(A_i/A_{i+1}) = p + k + d < \delta.$$

Предположим, что группа G не дискретна. Существует такое натуральное число s $(0 \leqslant s \leqslant n-1)$, для которого A_s — открытая подгруппа в G, а подгруппа A_{s+1} не открытая. В [1] указан путь построения для подгруппы A_s инвариантной в G открытой подгруппы F $(F \subset A_s)$, содержащей R-ряд, не имеющий дискретных факторов без кручения и состоящий из подгрупп, инвариантных в G.

Из лемм 3, 4 из [1] и из леммы 1 данной статьи следует, что сумма рангов вполне несвязных периодических факторов указанного ряда группы F не превосходит $p+k$. Применив к подгруппе F лемму 2, получим, что F/G_0 — периодическая вполне несвязная группа ранга, не превосходящего $p+k$.

Оценим ранг подгруппы F.

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — произвольное конечное подмножество элементов группы F; $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k$ — образы в G/G_0 этих элементов. Вследствие леммы 2 из [3] подгруппа $L=\overline{\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k\}}$ компактна. Рассмотрим полный прообраз L группы $\tilde{L}$ в F. L/G_0 — компактная группа. В L есть открытая подгруппа S, в которой содержится такая компактная инвариантная вполне несвязная подгруппа P, что S/P — группа Ли. $G_0 \subset S$. Фактор-пространство L/S компактно и дискретно, следовательно, оно конечно. $P \lhd S$, следовательно, существует лишь конечное число m подгрупп P_i, полученных трансформированием подгруппы P с помощью элементов из $L: P_i = x_i^{-1}Px_i$ $(i=1, \ldots, m)$.

Подгруппа $Q = P \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} P_i\right)$ компактна, инвариантна в L и имеет конечный индекс в P.

QG_0 — открытая подгруппа в L. $r(QG_0) \leqslant r(Q) + r(QG_0/Q)$. $QG_0/Q \cong G_0/G_0 \cap Q$, и вследствие [7], $r(QG_0/G_0) \leqslant \dim G + 1 \leqslant d+1$.

$$r(Q) \leqslant r(Q \cap G_0) + r(Q/Q \cap G_0).\ Q/Q \cap G_0 \cong QG_0/G_0.$$

QG_0/G_0 — подгруппа группы F/G_0, следовательно, $r(Q/Q \cap G_0) \leqslant p+k$.

Для оценки ранга подгруппы $Q \cap G_0$ рассмотрим ряд коммутантов группы $G_0 : G_0 \supset G' \supset \ldots \supset G^{(f)} = 1$.

$Q \cap G_0 \supset Q \cap G' \supset \ldots Q \cap G^{(f)} = 1$ — инвариантный ряд замкнутых подгрупп группы $Q \cap G_0$ с абелевыми факторами.

$$Q \cap G^{(i)}/Q \cap G^{(i+1)} \cong (Q \cap G^{(i)})\, G^{(i+1)}/G^{(i+1)}.$$

$(Q \cap G^{(i)})\, G^{(i+1)}/G^{(i+1)}$ — компактная подгруппа группы $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ $(i=0,1, \ldots, f-1)$. Следовательно, $r(Q \cap G^{(i)}/Q \cap G^{(i+1)}) \leqslant \dim G^{(i)}/G^{(i+1)}$.

Отсюда $r(Q \cap G_0) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{f-1} r(Q \cap G^{(i)}/Q \cap G^{(i+1)}) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{f-1} \dim G^{(i)}/G^{(i+1)} = \dim G \leqslant d$.

Получим: $r(QG_0) \leqslant d + (p+k) + (d+1) \leqslant 2d + p + k + 1$.

Оценим ранг подгруппы L. $r(L) \leqslant r(QG_0) + r(L/QG_0)$. L/QG_0 — фактор-группа группы L/G_0. Следовательно, $r(L/QG_0) \leqslant p + k$. $r(L) \leqslant 2(d+p+k)+1$, следовательно, $r(F) \leqslant 2(d+p+k)+1$ для $G_0 \neq 1$. Если $G_0=1$, $r(F) \leqslant p+k$.

Оценим ранг фактор-группы G/F. $G/F = A_0F/F \supset A_1F/F \supset \ldots \supset A_nF/F = 1$.

$$A_iF/F/A_{i+1}F/F \cong A_iF/A_{i+1}F \cong A_i/A_i \cap A_{i+1}F.$$

$A_i/A_i \cap A_{i+1}F$ — фактор-группа группы A_i/A_{i+1} $(i=0, \ldots, n-1)$; $A_iF/F/A_{i+1}F/F$ — дискретная группа, следовательно, для связных факторов A_i/A_{i+1} $A_i \subset A_{i+1}F$, и в этом случае $A_iF/F/A_{i+1}F/F = 1$.

Отсюда следует, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} r(A_iF/F/A_{i+1}F/F) \leqslant p+k$.

Вследствие [6] $r(G/F) \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n-1} r(A_iF/F/A_{i+1}F/F) \leqslant p+k$.

Оценим ранг группы G. Если $G_0 \neq 1$, то $r(G) \leqslant r(F) + r(G/F) \leqslant 2(d+p+k)+1+p+k = 3(p+k)+2d+1 \leqslant 3(p+k+d)$.

Если $G_0 = 1$, то $d=0$, и $r(G) \leqslant (p+k)+(p+k) = 2(p+k) < 3(p+k+d)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко З. И. Условие конечности ранга локально компактных разрешимых групп. — УМЖ, 1976, 28, № 5, с. 639—645.
2. Глушков В. М. Алгебры Ли локально бикомпактных групп. — УМН, 1957, 12, вып. 2, с. 137—142.

3. Чарин В. С. О группах конечного ранга. II. — УМЖ, 1966, **18**, № 3, с. 85—96.
4. Курош А. Г. Теория групп. М., Наука, 1967. 648 с.
5. Москаленко З. И. Локально компактные абелевы группы конечного ранга. — УМЖ, 1970, **22**, № 2, с. 174—181.
6. Мягкова Н. Н. О группах конечного ранга. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, **13**, № 6, с. 495—512.
7. Москаленко З. И. О ранге связных локально компактных групп. 1976, **28**, № 3, с. 325—333.

Научно-исследовательский
и конструкторско-технологический институт
городского хозяйства МКХ УССР

Поступила в редакцию
27.X. 1976 г.