УДК 517.948.3

С. П. Пономаренко

Исследование смешанных краевых задач методом парных интегральных уравнений

Рассмотрим парные интегральные уравнения с присоединенными функциями Лежандра в составе ядер

$$\int_0^\infty \frac{N(\tau)}{\tau} P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_1(x), \qquad 0 \leqslant x < a, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\,\varphi(\tau)\,d\tau = g_2(x), \qquad a < x < \infty, \tag{2}$$

где $P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)$ — присоединенная функция Лежандра с комплексным значком, $N(\tau)$ — весовая функция, $f_1(x)$ и $g_2(x)$ заданы каждая на своем промежутке, $\varphi(\tau)$ — неизвестная функция.

Уравнения вида (1) — (2) встречаются в многочисленных приложениях. К уравнениям (1) — (2) при целых значениях μ приходим, используя обобщенное интегральное преобразование Мелера—Фока для смешанных краевых задач, рассматриваемых в теории упругости, теплопроводности, электростатики и др. Уравнения подобного вида изучались в работах [1—3]. Решение (1) — (2) при произвольных $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, в [3] сведено к решению уравнения Фредгольма.

В п. 1 данной работы решение уравнений (1)—(2) при $|\mu| < 1/2$ сведено к решению фредгольмова интегрального уравнения способом, отличным от [3]. На основании результатов пп. 1, 2, приведено решение некоторых смешанных краевых задач.

1. Рассмотрим (1)—(2) при условии, что

1) $N(\tau)$—известная функция, $\dfrac{N(\tau)}{\tau}\dfrac{\Gamma(1/2+\mu+i\tau)\,\Gamma(1/2+\mu-i\tau)}{\Gamma(1/2+i\tau)\,\Gamma(1/2-i\tau)} -$ $- \tau^{\nu-1}$ абсолютно интегрируемая функция на $(0, \infty)$, имеющая ограниченную вариацию. На промежутке $(0, \infty)$ функция $N(\tau)$ имеет асимптотическое

представление вида

$$N(\tau)=\tau^{\gamma}[1+O(\tau^{-\varepsilon})], \quad \varepsilon>0, \ -2\mu\leqslant\gamma\leqslant 1-2\mu, \ |\mu|<1/2. \tag{3}$$

2) Правые части парных интегральных уравнений (1) и (2) — непрерывно дифференцируемые функции, каждая на своем промежутке, причем $|\operatorname{sh} x\, g_2(x)\, P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}|(\operatorname{ch} x)\in L(a, \infty)$.

Доопределим функцию $g_2(x)$ на $(0, \infty)$ следующим образом:

$$g(x)=g_1(x)\,H(a-x)+g_2(x)\,H(x-a), \tag{4}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, а $g_2(x)$ — известная функция.

Уравнения (1)—(2) принимают вид

$$\int\limits_0^\infty \frac{N(\tau)}{\tau} P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f_1(x), \qquad 0\leqslant x<a, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\infty P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\,\varphi(\tau)\,d\tau=g(x), \quad 0\leqslant x<\infty. \tag{6}$$

Применяя формулу обращения обобщенного интегрального преобразования Мелера — Фока [4] к (6), получаем:

$$\varphi(\tau)=\tau\operatorname{th}\pi\tau\,\Gamma(1/2+\mu+i\tau)\,\Gamma(1/2+\mu-i\tau)\,[\Gamma(1/2+i\tau)\,\Gamma(1/2-i\tau)]^{-1}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^a P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y)\,g_1(y)\operatorname{sh} y\,dy+\int\limits_a^\infty P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y)\,g_2(y)\operatorname{sh} y\,dy\right], \tag{7}$$

где $g_1(x)$ — вспомогательная неизвестная функция.

Для нахождения неизвестной функции $g_1(x)$ воспользуемся соотношениями, следующими из интегральных представлений присоединенной функции Лежандра [5]:

$$\cos\tau x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\Gamma(1/2-\mu)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{(\operatorname{sh} y)^{1+\mu}P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y)}{(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} y)^{1/2+\mu}}\,dy, \tag{8}$$

$$\sin\tau x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\Gamma(1/2+\mu)}\operatorname{th}\pi\tau\,\Gamma(1/2+\mu+i\tau)\,\Gamma(1/2+\mu-i\tau)\times$$

$$\times[\Gamma(1/2+i\tau)\,\Gamma(1/2-i\tau)]^{-1}\frac{d}{dx}\int\limits_x^\infty\frac{(\operatorname{sh} y)^{1-\mu}P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} y)}{(\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} x)^{1/2-\mu}}\,dy. \tag{9}$$

В силу (8)—(9) для (5)—(6) получим:

$$\int\limits_0^\infty\frac{N(\tau)}{\tau}\cos x\tau\,\varphi(\tau)\,d\tau=F_1(x), \quad 0\leqslant x<a, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{\Gamma(1/2+i\tau)\,\Gamma(1/2-i\tau)\sin x\tau\operatorname{cth}\pi\tau}{\Gamma(1/2+\mu+i\tau)\,\Gamma(1/2+\mu-i\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau=G(x), \quad 0\leqslant x<\infty, \tag{11}$$

где

$$F_1(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\Gamma(1/2-\mu)}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{(\operatorname{sh} y)^{1+\mu}f_1(y)\,dy}{(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} y)^{1/2+\mu}}, \quad 0\leqslant x<a, \tag{12}$$

$$G(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(1/2+\mu)} \frac{1}{dx} \int_x^\infty \frac{(\operatorname{sh} y)^{1-\mu} g(y)}{(\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x)^{1/2-\mu}} dy, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{13}$$

Из (4), (9), (10), исключая $\varphi(\tau)$ и полагая

$$\psi(x) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(1/2+\mu)} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{(\operatorname{sh} y)^{1-\mu} g_1(y)}{(\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x)^{1/2-\mu}} dy, \tag{14}$$

для неизвестной функции $\psi(x)$ получаем интегральное уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int_0^a K(x, y)\, \psi(y)\, dy = \Phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \tag{15}$$

ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(x, y) = \int_0^\infty \frac{k(\tau)}{\tau} \cos x\tau \sin y\tau d\tau, \tag{16}$$

где

$$k(\tau) = N(\tau) \frac{\Gamma(1/2+\mu+i\tau)\, \Gamma(1/2+\mu-i\tau) \operatorname{th} \pi\tau}{\Gamma(1/2+i\tau)\, \Gamma(1/2-i\tau)}, \tag{17}$$

а свободный член — $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = F_1(x) + \int_0^a K(x, y)\, G_1(y)\, dy + \int_a^\infty K(x, y)\, G_2(y)\, dy, \tag{18}$$

где

$$G_1(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(1/2+\mu)} \frac{d}{dy} \int_y^\infty \frac{(\operatorname{sh} t)^{1-\mu} g_2(t)\, dt}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y)^{1/2-\mu}}, \quad 0 < y < a, \tag{19}$$

$$G_2(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Gamma(1/2+\mu)} \frac{d}{dy} \int_a^\infty \frac{(\operatorname{sh} t)^{1-\mu} g_2(t)\, dt}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y)^{1/2-\mu}}, \quad 0 < y < a, \tag{20}$$

$G_1(x)$, $G_2(x)$ — непрерывные функции, каждая на своем промежутке, в силу 2), п. 1 [6, 7].

Интегральное уравнение (15) представимо в виде

$$\mathbf{U}\psi + \mathbf{K}_1\psi = \Phi, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{U} + \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}, \tag{22}$$

а $\mathbf{K}$ — интегральный оператор в (15), порожденный ядром $K(x, y)$ (16).

Интегральные операторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{K}_1$ имеют вид:

$$\mathbf{U}\psi = \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2} \Gamma(\nu)}{\pi} \int_0^a [\operatorname{sgn}(y-x)\, |x-y|^{-\nu} + (x+y)^{-\nu}]\, \psi(y)\, dy, \tag{23}$$

$$\mathbf{K}_1\psi = \frac{2}{\pi} \int_0^a \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{k(\tau) - \tau^\nu}{\tau} \right) \cos x\tau \sin y\tau\, d\tau \right\} \psi(y)\, dy. \tag{24}$$

Справедливость (21) следует из асимптотического представления $k(\tau)$ на $(0, \infty)$:

$$k(\tau)=\tau^{\nu}[1+0(\tau^{-\sigma})], \quad \nu=+2\mu+\gamma, \ 0\leqslant\nu<1, \ \sigma=\min(2, \varepsilon), \quad (25)$$

имеющего место в силу 1), п. 1, и асимптотических свойств гамма-функций, входящих в состав $k(\tau)$.

Для доказательства фредгольмовости уравнения (15) достаточно показать ограниченность оператора, обратного к оператору U, и вполне непрерывность оператора $\mathbf{K}_1$ из (21) [8].

Существование и ограниченность оператора, обратного к оператору **U**, и вполне непрерывность $\mathbf{K}_1$ следует из [6] и [7].

2. Рассмотрим осесимметричные смешанные краевые задачи для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}+\operatorname{cth} x\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 x}\right)u(x, y)=0, \quad (26)$$

где x и y — тороидальные координаты, связанные с цилиндрическими координатами r, z соотношениями $r+iz=\operatorname{cth}(x+iy)/2$.

Уравнение (26) рассматривается в области $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant y\leqslant\sigma\leqslant\pi$.

Находим решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (26), ограниченное при $x=0$ и на линии $x=\infty$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(x, 0)=f^{(1)}(x), \quad 0\leqslant x<a, \quad (27)$$

$$\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0}=g^{(1)}(x), \quad a<x<\infty, \quad (28)$$

$$[u(x, y)]_{y=\sigma}=h^{(1)}(x), \quad 0\leqslant x<\infty \quad (29)$$

или

$$u(x, 0)=f^{(2)}(x), \quad 0\leqslant x<a, \quad (30)$$

$$\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0}=g^{(2)}(x), \quad a<x<\infty, \quad (31)$$

$$\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right]_{y=\sigma}=h^{(2)}(x), \quad 0\leqslant x<\infty. \quad (32)$$

Задача об отыскании функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условиям (27) — (29), возникает при рассмотрении задач теории упругости о кручении цилиндрическим штампом упругого неоднородного анизотропного полушара [9, 10].

Подобные задачи для однородного изотропного полушара рассматривались в [2, 3].

Поскольку процесс решения задачи (27) — (29) совпадает с решением (30) — (32), то удобно привести решение этих задач совместно, записав граничные условия в виде

$$u(x, 0)=f^{(3)}(x), \quad 0\leqslant x<a, \quad (33)$$

$$\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right]_{y=0}=g^{(3)}(x), \quad a\leqslant x<\infty, \quad (34)$$

$$\left[mu(x, y)+l\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right]_{y=\sigma}=h^{(3)}(x), \quad 0\leqslant x<\infty, \ m^2+l^2\neq 0. \quad (35)$$

Функции $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$, $i=1, 2, 3$, из граничных задач (27)—(29), (30)—(32), (33)—(35) удовлетворяют следующим условиям:

а) $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, каждая на своем промежутке, причем $|\operatorname{sh} x g^{(i)}(x)| P_{-1/2}^{-\mu}(\operatorname{ch} x) \in L(a, \infty)$.

б) функции $h^{(i)}(x)$ такие, что $\operatorname{sh} x h^{(i)}(x)$ — непрерывная функция и имеет ограниченную вариацию на любом конечном промежутке из $(0, \infty)$, а $|\operatorname{sh} x h^{(i)}(x)| P_{-1/2}^{-\mu}(\operatorname{ch} x) \in L(0, \infty)$.

Разделяя переменные в (26), с учетом ограниченности решения дифференциального уравнения $u(x, y)$ на оси $0Z$ (т. е. при $x = 0$ и ограниченности на линии $x = \infty$), получаем представление решения $u(x, y)$ уравнения (26) в виде

$$u(x, y) = \int_0^\infty [c_1(\tau) \operatorname{sh} \tau y + c_2(\tau) \operatorname{ch} \tau y] P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x)\, d\tau, \tag{36}$$

где $P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x)$ — присоединенная функция Лежандра с комплексным значком, а $c_1(\tau)$ и $c_2(\tau)$ — произвольные функции от τ.

Используя (36), найдем $c_1(\tau)$ и $c_2(\tau)$, удовлетворяющие (33) — (35).

Для определения $c_1(\tau)$ и $c_2(\tau)$ получаем парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \frac{N(\tau)}{\tau} P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f_1(x), \quad 0 \leqslant x < a, \tag{37}$$

$$\int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x)\, \varphi(\tau)\, d\tau = g_2(x), \quad a < x < \infty, \tag{38}$$

где

$$\varphi(\tau) = \tau c_1(\tau), \tag{39}$$

$$N(\tau) = \frac{m \operatorname{th} \sigma\tau + l}{m + l \operatorname{th} \sigma\tau}, \tag{40}$$

$$f_1(x) = \int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x) \frac{s(\tau)\, d\tau}{m \operatorname{ch} \sigma\tau + l\tau \operatorname{sh} \sigma\tau} - f^{(3)}(x), \tag{41}$$

$$s(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi\tau \frac{\Gamma(1/2 + \mu + i\tau)\, \Gamma(1/2 + \mu - i\tau)}{\Gamma(1/2 + i\tau)\, \Gamma(1/2 - i\tau)} \int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}^{-\mu}(\operatorname{ch} x) \times$$

$$\times \operatorname{sh} x h^{(3)}(x)\, dx, \quad 0 \leqslant \tau < \infty, \tag{42}$$

а

$$g_2(x) = g^{(3)}(x), \tag{43}$$

$$c_2(\tau) = \frac{s(\tau) - c_1(\tau)(m \operatorname{sh} \sigma\tau + l\tau \operatorname{ch} \sigma\tau)}{m \operatorname{ch} \sigma\tau + l\tau \operatorname{sh} \sigma\tau}. \tag{44}$$

Из условий а), б) для функций $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$ следует выполнимость условий 1), 2) п. 1 для $f_1(x)$, $g_2(x)$ — из (37)—(38), поэтому к уравнениям (37)—(38) применимы результаты п. 1 для (1)—(2), где $\gamma = 0$, $0 \leqslant \mu < 1/2$, а функции $\varphi(\tau)$, $N(\tau)$, f_1, g_2 определяются формулами (39)—(43).

Полагая в (37)—(38): $m = 1$, $l = 0$ $f^{(3)}(x) = f^{(1)}(x)$, $g^{(3)}(x) = g^{(1)}(x)$, $h^{(3)}(x) = h^{(1)}(x)$, получаем решение задачи 1) п. 1, а при $m = 0$, $l = 1$ $f^{(3)}(x) = f^{(2)}(x)$, $g^{(3)}(x) = g^{(2)}(x)$, $h^{(3)}(x) = h^{(2)}(x)$ — решение задачи (30)—(32).

При $\sigma = \pi$, $\mu \neq 0$ в задачах (27) — (35) получаем решение смешанных краевых задач для неоднородного анизотропного полупространства с двусвязной линией раздела граничных условий.

При частном значении $\mu = 0$ в задаче (27) — (29), что соответствует задаче для однородного изотропного полушара, получается результат из [3].

При $\sigma = \pi$, $\mu = 0$ получается решение смешанных краевых задач для однородного изотропного полупространства с двусвязной линией раздела граничных условий, содержащихся в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. — ИФЖ, 1963, **67**, № 10, с. 67—71.
2. Баблоян А. А. Решение некоторых парных интегральных уравнений. — ПММ, 1964, **28**, вып. 6, с. 1015—1023.
3. Уфлянд Я. С. Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики. Л., «Наука», 1977. 220 с.
4. Николаев Б. Г. О разложении произвольной функции в интеграл по присоединенным функциям Лежандра первого рода с комплексными значками. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн, Л., «Наука», 1968, **9**, с. 105—117.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., «Наука», 1973. 296 с.
6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960. 300 с.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1977. 640 с.
8. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1971. 104 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977. 416 с.
10. Арутюнян Н. Х., Баблоян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963. 686 с.
11. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. К., «Наук. думка», 1977. 235 с.

Киевский институт
народного хозяйства

Поступила в редакцию 14.VI. 1977 г.,
после переработки — 10.I. 1978 г.