УДК 519.21

А. Таджиев

Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения полумарковского процесса

В данной статье строится асимптотическое разложение по степеням малого параметра ε для распределения времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний. При этом используется алгоритм построения асимптотических разложений в задачах возмущения матриц на спектре [1].

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$ — полумарковский процесс с конечным числом состояний $E = E_0 \cup \{0\}$, где $E_0 = \{1, 2, \ldots, m\}$. Переходные вероятности вложенной в нее цепи Маркова $\eta_\varepsilon(n)$, $n \geqslant 1$, имеют вид:

$$p_{kr}^{\varepsilon} = \begin{cases} p_{kr} - \varepsilon g_{kr}, & \text{если } k, r \in E_0, \\ \varepsilon g_{k0}, & \text{если } r = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $g_{k0} = \sum\limits_{r \in E_0} g_{kr}$, причем $\sum\limits_{r \in E_0} p_{kr} = 1$ и состояние цепи Маркова ξ_n^0 с матрицей перехода $p = \{p_{kr},\ k, r \in E_0\}$ образуют один эргодический класс. Обозначим через $\rho = \{\rho_k, k \in E_0\}$ стационарное распределение этой цепи, а через τ_k^ε — время пребывания полумарковского процесса в E_0 с началом в k-м состоянии до поглощения и через ζ_k — время пребывания полумарковского процесса в k-м состоянии. Для τ_k^ε запишем стохастические соотношения:

$$\tau_k^\varepsilon = \varepsilon\zeta_k + \sum_{r=1}^{m} J_{kr}(\varepsilon\zeta_k)\,\tau_r^\varepsilon, \tag{2}$$

где $J_{kr}(\varepsilon\zeta_k)$ — индикатор перехода из k-го в r-е состояние. Из (2) для распределений $U_k^\varepsilon(t) = P\{\tau_k^\varepsilon > t\}$ найдем систему интегральных уравнений марковского восстановления:

$$U_k^\varepsilon(t) = \overline{Q}_{k0}^\varepsilon(t) + \sum_{r=1}^{m} \int_0^\infty Q_{kr}^\varepsilon(du)\, U_r^\varepsilon(t - \varepsilon u), \tag{3}$$

где $\overline{Q}_{k0}^\varepsilon(t) = P\{\varepsilon\zeta_k > t,\ J_{k0}(\varepsilon\zeta_k) = 1\} = p_{k0}^\varepsilon \overline{P}_k(t/\varepsilon)$, $\overline{P}_k(t/\varepsilon) = 1 - P_k(t/\varepsilon) = P\{\zeta_k > t/\varepsilon\}$.

Учитывая (1), (3) можно записать в матричном виде:

$$P_\varepsilon U^\varepsilon(t) \equiv (I - P)\,U^\varepsilon(t) + Q_\varepsilon U^\varepsilon(t) + \varepsilon G_\varepsilon U^\varepsilon(t) = \varepsilon\Phi_\varepsilon(\tau), \tag{4}$$

где $\Phi_\varepsilon(\tau) = \{g_{k0}\overline{P}_k(\tau),\ k \in E_0\}$, $\tau = t/\varepsilon$, $Q_\varepsilon U^\varepsilon(t) = \Big\{\sum\limits_{r=1}^{m} p_{kr} \int\limits_0^\infty [U_r^\varepsilon(t) - U_r^\varepsilon(t - \varepsilon u)]\, dP_k(u),\ k \in E_0\Big\}$, $G_\varepsilon U^\varepsilon(t) = \Big\{\sum\limits_{r=1}^{m} g_{kr} \int\limits_0^\infty U_r^\varepsilon(t - \varepsilon u)\, dP_k(u),\ k \in E_0\Big\}$.

Граничные условия для уравнения (4) следующие:

$$U^{\varepsilon}(t) = \mathbf{1} = (1, \dots, 1) \text{ при } t \leqslant 0. \tag{5}$$

Теорема. *При выполнении условия $a_{k3} < \infty$ для решения $U^{\varepsilon}(t)$ системы* (4) *с начальным условием* (5) *имеет место асимптотическое разложение*:

$$U^{\varepsilon}(t) = U^0(t) + \varepsilon(U^1(t) + W^1(\tau)) + \varepsilon^2(U^2(t) + W^2(\tau)) + O(\varepsilon^2),$$

где $U^0(t) = e^{-\lambda t}\mathbf{1}$, $\lambda = \overline{g}/\overline{a}_1 = \sum_{k=1}^{m} \rho_k g_{kr} / \sum_{k=1}^{m} \rho_k a_{k1}$, $U^1(t) = e^{-\lambda t}[-R_0 \mathfrak{a}_d^{-(1)}(g - \lambda a_1) + \lambda_1 t\mathbf{1} + \lambda b_2 \mathbf{1}]$, $U^2(t) = R_0[\mathfrak{a}_d^{-(1)}(-P_1 U^1(t) + P_2 U^0(t))] + C_2(t)\,\mathbf{1}$, $W^1(\tau) = R * \Psi^1(\tau)$, $W^2(\tau) = R * \Psi^2(\tau)$, $\Psi^1(\tau) = \left\{\left(g_k + \sum_{r=1}^{m} p_{kr} W_r^1(0)\right)\overline{P}_k(\tau) + \lambda \int_{\tau}^{\infty} (\tau - u)\, dP_k(u),\ k \in E_0\right\}$, $\Psi^2(\tau) = -\overline{G}W^1(\tau) + \left\{\sum_{r=1}^{m} p_{kr} \int_{\tau}^{\infty} W^2(\tau - u)\, dP_k(u),\ k \in E_0\right\}$. *Скалярная функция* $C_2(t)$ *определяется из дифференциального уравнения*

$$\overline{a}_1 \frac{dC_2(t)}{dt} + \overline{g}C_2(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{-\lambda t},$$

где α, β — *известные скаляры. Начальное условие* $C_2(0)$ *определяется из условий*:

$$U^2(0) + W^2(0) = 0 \ \text{ и } \lim_{\tau \to \infty} W^2(\tau) = 0,$$

где $R = R(t) = \{R_{kr},\ k, r \in E_0\}$ — *матрица марковского восстановления* [2];

$$a_{km} = \int_0^{\infty} u^m dP_k(u), \quad k \in E_0,\ m = 1, 2, \dots,$$

$$\mathfrak{a}_d^{(k)} = \{\delta_{ij} a_{ik},\ i, j \in E_0\}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

— *диагональные матрицы, построенные по k-м моментам*; $R_0 = (A + \Pi)^{-1} - \Pi$ — *обобщенная обратная матрица к матрице* A: $A = \mathfrak{a}_d^{-(1)}(I - P)$; $\Pi = \mathbf{1} \oplus \mu$ — *проектор на пространство нулей матрицы* A: $A\Pi = \Pi A = 0$, $\Pi^2 = \Pi$.

Доказательство теоремы обосновано на разложении оператора P_{ε} на гладких функциях с применением алгоритма Люстерника — Вишика [1]. Разложим Q_{ε} и G_{ε} на гладких функциях. Для этого разложим функцию $U_r(t - \varepsilon u)$ в окрестности t в ряд Тейлора:

$$U_r(t - \varepsilon u) = U_r(t) - \varepsilon U_r'(t) + \frac{\varepsilon^2 u^2}{2} U_r''(t) + \sum (-1)^m \frac{\varepsilon^m u^m}{m!} U_r^{(m)}(t). \tag{7}$$

Принимая во внимание (6), (7), для разложения P_{ε} на гладких функциях получаем:

$$P_{\varepsilon}U(t) \equiv (I - P)\, U(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \varepsilon^m P_m U(t), \tag{8}$$

где

$$P_m U(t) = \frac{1}{m!} \mathfrak{a}_d^{(m)} P U^{(m)}(t) + \frac{1}{(m-1)!} \mathfrak{a}_d^{(m-1)} G U^{(m-1)}(t). \tag{9}$$

Для исходного уравнения (3) с учетом (1) для погранслоя имеем

$$P_\varepsilon W_k^\varepsilon(\tau) \equiv W_k^\varepsilon(\tau) - \sum_{r=1}^{m} P_{kr} \int_0^\infty W_r^\varepsilon(\tau-u)\,dP_k(u) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{r=1}^{m} g_{kr} \int_0^\infty W_r^\varepsilon(\tau-u)\,dP_k(u) = \varepsilon g_{k0} \overline{P}_k(\tau)$$

или

$$P_\varepsilon W^\varepsilon(\tau) \equiv (I-Q)\,W^\varepsilon(\tau) + \varepsilon \tilde{G} W^\varepsilon(\tau) = \varepsilon \Phi_\varepsilon(\tau). \tag{10}$$

Погранслой ищем в виде

$$W^\varepsilon(\tau) = \sum_{m\geqslant 1} \varepsilon^m W^m(\tau). \tag{11}$$

Решение уравнения (4) будем отыскивать в виде

$$U^\varepsilon(t) = U^0(t) + \varepsilon\,(U^1(t) + W^1(\tau)) + \varepsilon^2\,(U^2(t) + W^2(\tau)) + O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (8), умножая на $\alpha_d^{-(1)}$ и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем систему алгебраических уравнений для определения регулярных членов асимптотики:

$$\begin{aligned}
&AU^0(t) = 0,\\
&AU^1(t) = -\alpha_d^{-(1)} P_1 U^0(t),\\
&AU^2(t) = \alpha_d^{-(1)}(-P_1U^1(t) + P_2U^0(t)),\\
&AU^3(t) = \alpha_d^{-(1)}[-P_1U^2(t) + P_2U^1(t) - P_3U^0(t)].
\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (11) в (10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему уравнений для определения членов погранслоя:

$$\begin{aligned}
&(I-Q)\,W^1(\tau) = \Phi_\varepsilon(\tau),\\
&(I-Q)\,W^m(\tau) + \tilde{G}W^{m-1}(\tau) = 0, \quad m > 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) последовательно находим $U^0(t)$, $U^1(t)$ и $U^2(t)$. Из первого уравнения (13) видно, что $U^0(t) = C_0(t)\,\mathbf{1}$, где $C_0(t)$ — неизвестная скалярная функция. Она определяется из условий разрешимости второго равенства системы (13), т. е.

$$\Pi\,(\alpha_d^{(1)} P_1 U^0(t)) = 0.$$

Принимая во внимание (9), вычислим $\alpha_d^{(1)} P_1 U^0(t)$:

$$\alpha_d^{(1)} P_1 U^0(t) = P\frac{d}{dt}U^0(t) + \alpha_d^{-(1)} G U^0(t) = C_0'(t)\,\mathbf{1} + \alpha_d^{-(1)} C_0(t)\,G\mathbf{1}.$$

Таким образом получаем дифференциальное уравнение для скалярной функции $C_0(t)$

$$C_0'(t) = -(\mu, \alpha_d^{-(1)} G\mathbf{1})\,C_0(t), \quad \lambda = (\mu, \alpha_d^{-(1)} G\mathbf{1}).$$

Решая это уравнение с начальным условием $C_0(0) = 1$, получаем

$$U^0(t) = e^{-\lambda t}\mathbf{1}. \tag{15}$$

Будем искать $U^1(t)$ в виде

$$U^1(t) = -R_0 \alpha_d^{-(1)} P_1 U^0(t) + C_1(t)\,\mathbf{1}, \tag{16}$$

где $C_1(t)$ — неизвестная скалярная функция, определяемая из условия разрешимости третьего равенства системы (13):

$$\Pi[\mathfrak{a}_d^{-(1)}(-P_1U^1(t)+P_2U^0(t))]=0.$$

Принимая во внимание (9), (15) и (16), получаем дифференциальное уравнение для определения скалярной функции $C_1(t)$:

$$\bar{a}_1\frac{d}{dt}C_1(t)+\bar{g}C_1(t)=b_1e^{-\lambda t},$$

где

$$b_1=\mu\left[(G-\lambda\mathfrak{a}_d^{(1)})R_0\mathfrak{a}_d^{-(1)}(g-\lambda a_1)+\lambda^2\mathfrak{a}_d^{(1)}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{a}_d^{-(1)}a_2-a_1\right]\right..$$

Окончательно имеем

$$U^1(t)=e^{-\lambda t}[-R_0\mathfrak{a}_d^{-(1)}(g-\lambda a_1)+\lambda_1t\mathbf{1}+k_0\mathbf{1}],$$

где $\lambda_1=b_1/\bar{a}_1$. Итак, $U^1(t)$ определена с точностью до скалярной постоянной k_0. Следующий член асимптотики $U^2(t)$ можно найти таким же путем:

$$U^2(t)=R_0[-\mathfrak{a}_d^{-(1)}P_1U^0(t)+\mathfrak{a}_d^{-(1)}P_2U^0(t)]+C_2(t)\mathbf{1}.$$

Функция $C_2(t)$ определяется из условия разрешимости четвертого равенства системы (13); получается дифференциальное уравнение

$$\bar{a}_1\frac{dC_2(t)}{dt}+\bar{g}C_2(t)=(\alpha t+\beta)e^{-\lambda t},$$

где α, β — известные скаляры. Таким образом, $U^2(t)$ определена с точностью до некоторой постоянной k_1:

$$U^2(t)=R_0[-\mathfrak{a}_d^{-(1)}P_1U^1(t)+\mathfrak{a}_d^{-(1)}P_2U^0(t)]+[\alpha_1t^2+\beta_1t+k_1]e^{-\lambda t}\mathbf{1},$$

где $\alpha_1=\alpha/2\bar{a}_1$, $\beta_1=\beta/\bar{a}_1$.

Из соотношения (5) видно, что $U_k^\varepsilon(t)=P\{\tau_k^\varepsilon>t\}$ при $t\leqslant 0$. Тогда из (12), полагая $t=\varepsilon\tau$ и используя разложение функций $U^0(\varepsilon\tau)$, $U^1(\varepsilon\tau)$ и $U^2(\varepsilon\tau)$ в окрестности нуля в ряд Тейлора, получаем:

$$\mathbf{1}\equiv U^0(0)+\varepsilon\tau U^{0\prime}(0)+\frac{\varepsilon^2\tau^2}{2}U^{0\prime\prime}(0)+\varepsilon U^1(0)+$$

$$+\varepsilon^2\tau U^{1\prime}(0)+\varepsilon U^2(0)+\varepsilon W^1(\tau)+\varepsilon^2W^2(\tau)+\ldots$$

Из (15) видно, что $U^0(0)=\mathbf{1}$, $U^{0\prime}(0)=-\lambda\mathbf{1}$, $U^{0\prime\prime}(0)=\lambda^2\mathbf{1}$. Имеем

$$\begin{aligned}&W^1(\tau)=-U^1(0)+\lambda\tau\mathbf{1}\quad\text{при }\tau<0,\\&W^2(\tau)=-U^2(0)+\tau U^{1\prime}(0)-\frac{\lambda^2\tau^2}{2}\mathbf{1}\quad\text{при }\tau<0,\end{aligned}\tag{17}$$

при $\tau=0$

$$W^1(0)+U^1(0)=0,\quad W^2(0)+U^2(0)=0.\tag{18}$$

Для определения первого члена погранслоя можно записать из первого равенства системы (14) следующие уравнения:

$$W_k^1(\tau)-\sum_{r=1}^m p_{kr}\int_0^\tau W_r^1(\tau-u)\,dP_k(u)=$$

$$=g_{k0}\bar{P}_k(\tau)+\sum_{r=1}^m P_{kr}\int_\tau^\infty W_r^1(\tau-u)\,dP_k(u).\tag{19}$$

Учитывая (17) и (18), вычисляем

$$\int_{\tau}^{\infty} W_r^1(\tau-u)\,dP_k(u) = W_r^1(0)\,\overline{P}_k(\tau) + \lambda\int_{\tau}^{\infty}(\tau-u)\,dP_k(u).$$

Обозначая правую часть уравнений (19) через $\Psi_k^1(\tau)$, запишем их в матричном виде:

$$W^1(\tau) - \int_0^{\tau} Q(du)\,W^1(\tau-u) = \Psi^1(\tau). \tag{20}$$

Поскольку $W^1(\tau)$ продолжается в левую полуплоскость непрерывно, при $\tau=0$ из (20) имеем $W^1(0)=\Psi^1(0)$. Тогда

$$W^1(0) = G\mathbf{1} + PW^1(0) - \lambda\mathfrak{a}_d^{(1)}\mathbf{1}. \tag{21}$$

Умножая (21) на $\mathfrak{a}_d^{-(1)}$ и учитывая, что $A=\mathfrak{a}_d^{-(1)}(I-P)$, получаем

$$AW^1(0) = \mathfrak{a}_d^{-(1)}G\mathbf{1} - \lambda\mathbf{1}, \quad W^1(0) = R_0B\mathbf{1} + \delta_1\mathbf{1} \ \ (B=\mathfrak{a}_d^{-(1)}G). \tag{22}$$

Постоянная δ_1 определяется из условия: $\lim\limits_{\tau\to\infty} W^1(\tau)=0$. Решение уравнения (20) представимо в виде $W^1(\tau)=R*\Psi^1(\tau)$. Используя узловую предельную теорему восстановления (см. [2]), получаем

$$\lim_{\tau\to\infty} W^1(\tau) = \Big(\rho, \int_0^{\infty}\Psi^1(\tau)\,d\tau\Big)\Big/\overline{a}_1 = \Big(\mu\mathfrak{a}_d^{-(1)}, \int_0^{\infty}\Psi^1(\tau)\,d\tau\Big) = 0.$$

Из этих условий находим δ_1: $\delta_1=-\lambda b_2$, где $b_2=\rho\left(\mathfrak{a}_d^{(1)^2}-\frac{1}{2}\mathfrak{a}_d^{(1)}\right)\mathbf{1}$. Учитывая условие первого равенства системы (18), получаем, что $\delta_1=-k_0$. Остальные члены погранслоя находятся аналогично. Имеем $W^2(\tau)=R*\Psi^2(\tau)$. Постоянная k_1 определяется из условий $U^2(0)+W^2(0)=0$ и $\lim\limits_{\tau\to\infty} W^2(\tau)=0$.

Для обоснования асимптотического разложения (12) строится уравнение марковского восстановления, для остаточного члена находится уравнение типа первого уравнения системы (14); для остаточного члена показывается, что правая часть этого уравнения порядка $O(\varepsilon^2)$.

Отсюда следует, что остаточный член разложения (12) также имеет порядок $O(\varepsilon^2)$.

С л е д с т в и е. *Полученные разложения справедливы для распределения времени поглощения цепи Маркова* [3].

Повторяя доказательство теоремы, в этом случае можно убедиться, что $b_2=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В и ш и к М. И., Л ю с т е р н и к Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. — УМН, 1960, 15, вып. 3, с. 3—80.
2. К о р о л ю к В. С., Т у р б и н А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. К., «Наук. думка», 1976. 181 с.
3. К о р о л ю к В. С., П е н е в И. П., Т у р б и н А. Ф. Асимптотическое разложение для распределения времени поглощения цепи Маркова. — Кибернетика, 1973, № 4, с. 133—135.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
20.IX 1977 г.