УДК 517.917

Г. С. Грачева

Достаточные условия разрешимости линейного дифференциального уравнения с большим параметром в случае кратного корня характеристического уравнения

В n-мерном вещественном или комплексном векторном пространстве E рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = \lambda A(\tau, \lambda) z, \tag{1}$$

где $\tau \in [0, T]$; λ — большой комплексный параметр; $A(\tau, \lambda)$ — операторная, а $z(\tau, \lambda)$ — векторная функции с значениями в E.

Пусть операторная функция A удовлетворяет условиям:

а) справедливо представление

$$A(\tau, \lambda) = \sum_{s \geqslant 0} \lambda^{-s} A_s(\tau), \tag{2}$$

предполагаемое асимптотическим в смысле [1], с. 146;

б) спектр оператора $A_0(\tau)$ состоит из функции $\lambda_0(\tau)$, которой соответствует один элементарный делитель кратности n;

в) операторы A_s $(s \geqslant 0)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по $\tau \in [0, T]$.

Без ограничения общности можно считать, что в уравнении (1) A_0 имеет канонический вид $A_0(\tau) = \lambda_0(\tau) I + J$, где I — единичный, J — нильпотентный операторы в E, так как в противном случае заменой переменных $z = V(\tau) x$, где V — неособенная матрица, приводящая A_0 к каноническому виду, от (1) перейдем к уравнению того же вида

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda B(\tau, \lambda) x,$$

где

$$B_s(\tau) = \begin{cases} V^{-1}(\tau) A_0(\tau) V(\tau) = \lambda_0 I + J & (s = 0), \\ V^{-1}(\tau) A_1(\tau) V(\tau) - V^{-1}(\tau) V'(\tau) & (s = 1), \\ V^{-1}(\tau) A_s(\tau) V(\tau) & (s \geqslant 2). \end{cases} \tag{3}$$

Частное решение уравнения (1) будем искать асимптотическим методом в виде

$$z(\tau, \lambda) = \mu^{-k} U(\tau, \mu) h(\tau, \mu), \tag{4}$$

где μ — большой параметр такой, для которого $\lambda = \mu^k$, k — целое, $1 \leqslant k \leqslant n$; U — n-мерный вектор; h — скалярная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\frac{dh}{d\tau} = \lambda p(\tau, \mu) h$.

Функции U, p ищутся в виде разложений типа (2)

$$U(\tau, \mu) = \sum_{s \geqslant 0} \mu^{-s} U_s(\tau), \quad p(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{s \geqslant 1} \mu^{-s} p_s(\tau) \tag{5}$$

(алгоритм L_k).

Аналогично [2—4] для определения неизвестных коэффициентов разложений (5) получаем бесконечную систему рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} JU_0 = 0, \\ JU_{ik+l} = \sum_{s=0}^{ik+l-1} p_{ik+l-s} U_s + H_{ik+l} \quad (i \geqslant 0;\ l = \overline{0, k-1};\ ik + l \geqslant 1), \end{gathered} \tag{6}$$

где при $l = 0, \ldots, k-1$

$$H_{ik+l} = \begin{cases} 0 & (i = 0), \\ U'_{(i-1)k+l} - \sum_{q=1}^{i} A_q U_{(i-q)k+l} & (i \geqslant 1). \end{cases}$$

Условием разрешимости уравнений (6) будет равенство нулю n-й координаты векторов — правых частей этих уравнений [5], с. 59,

$$\sum_{s=0}^{ik+l-1} p_{ik+l-s} U_{s,n} + H_{ik+l,n} = 0 \quad (i \geqslant 0;\ l = \overline{0, k-1}). \tag{7}$$

Заметим, что задача построения решения уравнения (1) в виде (4) сводится к определению первой, отличной от нуля функции p_s. Действительно, если p_1 найдена из условия разрешимости некоторого N-го уравнения системы (6), то все последующие p_s подбираются так, чтобы было разрешимо $(N + s - 1)$-е уравнение. Тем самым будут последовательно найдены все векторы U_i как решение (6) с таким образом выбранными функциями p_s $(1 \leqslant s \leqslant i)$. Причем U_i непрерывно дифференцируемы в силу предположения в) (доказывается аналогично [2, 3]).

Но функции p_s определяются соотношениями вида (см. [4], с. 135)

$$p_s(\tau) = \frac{g_s(\tau)}{k p_1^{n-1}(\tau)} \qquad (p_1(\tau) \neq 0).$$

Поэтому в дальнейших построениях будем требовать от операторов A_s выполнения условий, достаточных для того, чтобы $p_1(\tau) \neq 0$ на $[0, T]$, либо $p_1(\tau) \equiv 0$ и $p_2(\tau) \neq 0$.

Пусть в дальнейшем

$$\alpha_s(\tau) = \sum_{i=1}^{s} a^{(1)}_{n+1-i,\, s-i+1}(\tau) \qquad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

$$\gamma_n(\tau) = a^{(2)}_{n,1}(\tau) + a'^{(1)}_{n-1,1}(\tau) - \sum_{i=1}^{n-1} a^{(1)}_{i,1}(\tau)\, a^{(1)}_{n,1+i}(\tau),$$

где через $a^{(s)}_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ обозначены элементы матрицы A_s.

Случай $k = n$ (алгоритм L_n) детально рассмотрен в [4], с. 124, при условии, что $\alpha_1(\tau) \neq 0$ $(\tau \in [0, T])$.

Если же матрица A_1 такая, для которой

$$\alpha_1(\tau) = a^{(1)}_{n,1}(\tau) \equiv 0 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant T), \tag{8}$$

то решение (1) при $n > 2$ (случай $n = 2$ см. в [4], с. 164) можно искать по той же схеме L_n, положив $p_1(\tau) \equiv 0$ и указав условия, достаточные для построения функции p_2, отличной от нуля на $[0, T]$ (алгоритм $L_n^{(0)}$). Но такой метод дает слишком жесткие ограничения на операторы A_1 и A_2 (см. лемму 1), которые могут быть ослаблены, если воспользоваться алгоритмом L_k при $k \leqslant n-1$.

Лемма 1. *Пусть оператор* $A(\tau, \lambda)$ *удовлетворяет условиям* а) — в). *Тогда для построения решения уравнения* (1) *в виде* (4) *достаточно, чтобы при* $\tau \in [0, T]$ *в случае алгоритма* $L_n^{(0)}$ (*n нечетное*)

1) $\alpha_s(\tau) \equiv 0 \quad (s = 1, \ldots, [n/2] + 1)$;
2) $\gamma_n(\tau) \neq 0$;

в случае алгоритма $L_n^{(0)}$ (*n четное*)

1) $\alpha_s(\tau) \equiv 0 \; (s = 1, \ldots, n/2)$;
2) $\alpha_{\frac{n}{2}+1}(\tau)$, $\gamma_n(\tau)$ *одновременно не обращаются в нуль*;

в случае алгоритма L_k $(2k > n)$

1) $\alpha_s(\tau) \equiv 0 \quad (s = 1, \ldots, n-k)$;
2) $\alpha_{n-k+1}(\tau) \neq 0$;

в случае алгоритма L_k $(2k = n)$

1) $\alpha_s(\tau) \equiv 0 \; (s = 1, \ldots, k)$;
2) $\alpha_{k+1}(\tau)$, $\gamma_n(\tau)$ *одновременно не обращаются в нуль*;

в случае алгоритма L_k $(2k < n)$

1) $\alpha_s(\tau) \equiv 0 \quad (s = 1, \ldots, k)$;
2) $\alpha_{k+1}(\tau) \neq 0$, $\gamma_n(\tau) \neq 0$;

в случае алгоритма L_n 2) $\alpha_1(\tau) \neq 0$.

Заметим, что первая отличная от нуля функция p_s определяется из условия разрешимости N-го уравнения системы (6), где

$$N = \begin{cases} n & \text{при } L_n,\ L_k\,(2k \geqslant n), \\ 2k & \text{при } L_k\,(2k < n), \\ 2n & \text{при } L_n^{(0)}. \end{cases}$$

Первые условия леммы обеспечивают разрешимость предыдущих $(N-1)$-го уравнений при соответствующем алгоритме (в случае L_n эти уравнения всегда разрешимы, так как условие (7) для них выполняется тождественно). Вторые условия гарантируют, что $p_s(\tau) \neq 0$ на $[0, T]$ ($s = 1$ в случае L_k $(k \leqslant n)$; $s = 2$ при $L_n^{(0)}$).

Алгоритму L_k присуща следующая закономерность: если впервые элементы оператора A_i $(i \geqslant 1)$ вошли в выражение для определения функции p_r (из условия разрешимости N_i-го уравнения (6)), то условие (7) для $(N_i + j)$-го уравнения, определяющее функцию p_{r+j}, будет содержать уже элементы оператора A_i'. Еще через j шагов в (7) войдут элементы $A_i^{(2)}$ и т. д. Причем число j постоянно внутри своего алгоритма, т. е. полностью определяется числом k и не зависит от i. Можно, например, показать, что

$$j = \begin{cases} n-1 & \text{при } L_n, \\ n-2 & \text{при } L_n^{(0)}, \\ k-1 & \text{при } L_k\,(2k \geqslant n), \\ k & \text{при } L_k\,(2k < n), \end{cases} \qquad r = \begin{cases} (i-1)\,n+1 & \text{при } L_n, \\ (i-2)\,n+2 & \text{при } L_n^{(0)}, \\ ik-n+1 & \text{при } L_k\,(2k \geqslant n), \\ (i-2)\,k+1 & \text{при } L_k\,(2k < n). \end{cases}$$

Поэтому в выражение для функции $p_s (s \geqslant 1)$ войдут элементы операторов $A_i^{(q)}$ и не войдут элементы $A_i^{(q+1)}$, где целые i, $q \geqslant 0$ такие, для которых $r + jq \leqslant s < r + j(q+1)$, т. е. $q = \left[\frac{s-r}{j}\right]$ (через $[b]$ обозначена целая часть числа b).

Обозначим через $z_m(\tau, \lambda)$ вектор, получающийся по формуле (4) вместо вектора $z(\tau, \lambda)$, если в разложениях (5) ограничиться членами порядка не выше m относительно μ^{-1}. Будем называть его m- м приближением к решению уравнения (1), найденным по схеме L_k.

Приведенные выше рассуждения позволяют уточнить требование непрерывной дифференцируемости операторов A_i, достаточное для построения непрерывных по $\tau \in [0, T]$ функций p_s, U_s $(0 \leqslant s \leqslant m)$.

Лемма 2. *Пусть при соответствующем алгоритме* L_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *выполнены условия леммы* 1. *Тогда для построения m-го приближения к решению уравнения* (1) *достаточно потребовать, чтобы операторы* $A_i(\tau)$ *были из класса* $C^{(a_i)}$ $(i = 1, \ldots, i_m)$, *где в случае алгоритма* L_n

$$a_i = \left[\frac{m + (1-i)n - 1}{n-1}\right], \qquad i_m = \left[\frac{m-1}{n}\right];$$

в случае алгоритма $L_n^{(0)}$

$$a_1 = \left[\frac{m-2}{n-2}\right] + 1, \quad a_i = \left[\frac{m + (2-i)n - 2}{n-2}\right], \quad i_m = \left[\frac{m-2}{n}\right] + 2;$$

в случае алгоритма $L_k\,(2k \geqslant n)$

$$a_1 = \left[\frac{m-1}{k-1}\right], \quad a_i = \left[\frac{n + m + ik - 1}{k-1}\right], \quad i_m = \left[\frac{m+n-1}{k}\right];$$

в случае алгоритма $L_k\,(2k < n)$

$$a_0 = \left[\frac{m-1}{k}\right] + 2 - i, \quad i_m = \left[\frac{m-1}{k}\right] + 2.$$

Замечание 1. Если оператор A_0 не приведен к каноническому виду, то для выполнения условий леммы 2 для оператора $B(\tau, \lambda)$ из (3) в терминах операторов A_i достаточно потребовать, чтобы $A_0 \in C^{(a_0)}$, где $a_0 = a_1 + 1$.

Обоснование асимптотической сходимости рассматриваемого процесса не отличается от приведенного в [2, 3].

Пусть

$$\lambda^{-(s+1)} A_{s+1}(\tau, \lambda) = A(\tau, \lambda) - \sum_{j=0}^{s} \lambda^{-j} A_j(\tau),$$

$$\Pi_R = \{\lambda = |\lambda| e^{i\varphi} : |\lambda| \geqslant R;\ |\varphi| \leqslant \varphi_0\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Пусть, кроме того, оператор* $A_{i_m+1}(\tau, \lambda)$ *равномерно ограничен в области* $[0, T] \times \Pi_R$; *оператор* $A_0(\tau)$ *непрерывен и* $\mathrm{Re}\,\lambda_0(\tau) \leqslant 0$. *Тогда при достаточно большом* R *m-е приближение* z_m *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{dz_m}{d\tau} = \lambda A(\tau, \lambda) z_m + \lambda^{-\frac{m+1}{k}} \psi(\tau, \lambda),$$

где $\psi : [0, T] \times \Pi_R \to E$ *равномерно ограничена по* τ, λ.

Теорема 2. *Пусть точное и m-е приближение решения уравнения* (1) *взяты при одинаковых начальных условиях. Тогда при выполнении усло-*

вий предыдущей теоремы можно указать такое $c_m > 0$, *не зависящее от* λ, *для которого при достаточно большом* R *и достаточно малом* φ_0 *имеет место оценка*

$$\| z(\tau, \lambda) - z_m(\tau, \lambda) \| \leqslant c_m |\lambda|^{-\frac{m+1}{k}}. \qquad (9)$$

В случае выполнения строгого неравенства $\operatorname{Re}\lambda_0(\tau) < 0$ $(\tau \in [0, T])$ *оценка может быть улучшена*

$$\| z(\tau, \lambda) - z_m(\tau, \lambda) \| \leqslant c_m |\lambda|^{-\frac{m+1+k}{k}}.$$

Замечание 2. Если оператор $A_0(\tau)$ такой, для которого

$$\max_{\tau \in [0, T]} \operatorname{Re}\lambda_0(\tau) = \beta > 0,$$

то заменой переменных $z = \exp(g(\tau))\, y$, где $g \in C^{(1)}[0, T]$, $g'(\tau) = \lambda l(\tau)$ и $\operatorname{Re} l(\tau) \geqslant \beta$, можно от уравнения (1) перейти к уравнению того же вида, спектр главной части которого лежит в открытой левой полуплоскости. Тогда для него будет верна теорема 2. Если, кроме того, $\operatorname{Re} g(\tau) \leqslant 0$, то для m-го приближения к решению уравнения (1), взятого в виде $z_m = \exp(g(\tau))\, y_m$, где y_m — m-е приближение к решению y преобразованного уравнения, справедлива оценка (9). В качестве g можно, например, взять такую функцию, для которой

$$\operatorname{Re} g(\tau) = -\beta e^{\lambda(T-\tau)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. К., Изд-во АН УССР, 1964. 188 с.
2. Далецкий Ю. Л. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве. — УМЖ, 1950, **2**, № 4, с. 71—91.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970. 534 с.
4. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К., «Наук. думка», 1966. 248 с.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1, М., «Наука», 1974. 323 с.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.IV. 1977 г.