УДК 517.5

Е. В. Карупу

О модулях гладкости конформных отображений

Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости, ограниченная спрямляемой гладкой жордановой кривой Γ, а угол τ между касательной к Γ и положительной вещественной осью—непрерывная функция $\tau=\tau(s)$ длины дуги кривой Γ. Пусть $w=\varphi(z)$ — гомеоморфизм замкнутого единичного круга $\overline{D}=\{z:|z|\leqslant 1\}$ на замыкание $\overline{G}$ области G, конформный в открытом единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$. Пусть $z=\psi(w)$ — функция, обратная к функции φ. В статье устанавливаются результаты о гладкостях функций $\varphi'(z)$, $\psi'(w)$ и $\tau(s)$ в терминах как обычных вещественных модулей гладкости, так и комплексных равномерных, введенных в [1] (см. также [2]).

Пусть на множестве E в комплексной плоскости задана конечная функция $f(z)$. Фиксируем натуральное число k. Комплексные конечные разности k-го порядка функции $f(z)$ в точках $z_0,\ldots,z_k\in E\,(z_p\neq z_q\;\forall p\neq q)$ будем обозначать через $[z_0,\ldots,z_k;f,z_0]$ (см. [1 и 3]). Для всякой точки $w\in E$ и числа $\delta>0$ обозначим $E_{w,\delta}=E\cap\{z:|z-w|\leqslant\delta\}$. Пусть фиксировано число $N\in[k,\infty)$. Скажем, что $(z_0,\ldots,z_k)\in E_{w,\delta}(N)$, если $z_0,\ldots,z_k\in E_{w,\delta}$ и $|z_i-z_j|/|z_p-z_q|\leqslant N\;\forall\, i,j,p,q=0,\ldots,k\,|\,p\neq q$.

Один из типов равномерных модулей гладкости введен в [1] по формуле

$$\omega_{k,N,E}(f,\delta)=\sup_{w\in E}\sup_{(z_0,\ldots,z_k)\in E_{w,\delta}(N)}|[z_0,\ldots,z_k;f,z_0]|. \tag{1}$$

Если функция $f(z)$ задана на замыкании $\overline{B}$ односвязной области B в комплексной плоскости, то модуль гладкости $\omega_{k,N,\partial B}(f,\delta)$ называется *контурным*, а модуль гладкости $\omega_{k,N,\overline{B}}(f,\delta)$ — *телесным*.

Если в качестве множества E рассматривается вещественная прямая R и в (1) допускаются лишь наборы точек, образующие арифметическую прогрессию, то соответствующие модули гладкости называются *арифметическими* и обозначаются $\omega_k(f,\delta)$. Легко видеть, что арифметические модули гладкости совпадают с обычными вещественными модулями гладкости.

На спрямляемых жордановых кривых класса S_λ П. М. Тамразов (см. [1]) ввел криволинейные равномерные модули гладкости $\tilde{\omega}_{k,N,\Gamma}(f,\delta)$. Пусть $\rho_\Gamma(z',z'')$ — криволинейное (относительно Γ) расстояние между точками $z',z''\in\Gamma$. Для всякой точки $w\in\Gamma$ и числа $\delta>0$ обозначим $\Gamma_{w,\delta}=\{z\in\Gamma\,|\,\rho_\Gamma(z,w)\leqslant\delta\}$. Пусть $N\in[1,\infty)$ фиксировано. Рассмотрим линейно упорядоченные на Γ наборы точек $(z_0,\ldots,z_k)$, $z_i\in\Gamma$, $i=0,\ldots,k$. Скажем, что $(z_0,\ldots,z_k)\in\Gamma_{w,\delta}(N)$, если $z_0,\ldots,z_k\in\Gamma_{w,\delta}$ и $\rho_\Gamma(z_i,z_{i+1})/\rho_\Gamma(z_j,z_{j+1})\leqslant N\;\forall i,j=0,\ldots,k-1$. Тогда

$$\tilde{\omega}_{k,N,\Gamma}(f,\delta)=\sup_{w\in\Gamma}\sup_{(z_0,\ldots,z_k)\in\Gamma_{w,\delta}(N)}|[z_0,\ldots,z_k;f,z_0]|. \tag{2}$$

В случае, когда функция $f(z)$ задана на единичной окружности $\{z:|z|=1\}$, ее можно рассматривать как функцию $f(e^{i\vartheta})$ центрального угла ϑ. Вещественные арифметические модули гладкости функции $f(e^{i\vartheta})$, определяемые через ее конечные разности в точках $\vartheta_0,\ldots,\vartheta_k\in R$, будем обозначать $\omega_k(f(e^{i\vartheta}),\delta)_\vartheta$.

В [4] О. Келлог доказал следующую теорему: если (при $\delta\to 0$) $\omega_1(\tau,\delta)=O[\delta^\alpha]$, $0<\alpha<1$, то $\varphi'(z)$ непрерывна и не обращается в нуль на $\overline{D}$, а на ∂D имеет место соотношение $\omega_1(\varphi'(e^{i\vartheta}),\delta)_\vartheta=O[\delta^\alpha]$.

В [5] эта теорема обобщена на случай производных произвольного натурального порядка.

В [6] и [7] теорема Келлога обобщена следующим образом: если $\int\limits_0^l \frac{\omega_1(\tau, t)}{t}\,dt < \infty$, то $\varphi'(z)$ непрерывна и не обращается в нуль на $\overline{D}$, а на ∂D

$$\omega_1(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O\Big[\omega_1(\tau, \delta) + \int\limits_0^l \frac{\omega_1(\tau, t)}{t(1+t/\delta)}\,dt + \delta \log \frac{1}{\delta}\Big].$$

Здесь и всюду ниже предполагается, что $\delta \in (0, l]$, где l — длина кривой Γ.

На случай производных этот результат обобщен в статье [8].

В [9] аналог теоремы Келлога получен при несколько ином интегральном условии, наложенном на $\omega_1(\tau, \delta)$.

Для модулей гладкости второго порядка известен следующий результат [10]: если $\omega_2(\tau, \delta) = O[\delta^\alpha]$, $0 < \alpha < 2$, то $\varphi'(z)$ непрерывна и не обращается в нуль на $\overline{D}$ и $\omega_2(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\delta^\alpha]$.

Все эти результаты носят контурный характер. Телесное усиление теоремы Келлога известно лишь для модулей гладкости первого порядка (см. [1]).

Обращение теоремы Келлога для модулей непрерывности получается просто. Для модулей гладкости второго порядка в статье [11] получен следующий результат: если $\varphi'(z)$ непрерывна на $\overline{D}$, а на ∂D не обращается в нуль и удовлетворяет условию $\omega_2(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\delta^\alpha]$, $0 < \alpha < 2$, то $\omega_2(\tau, \delta) = O[\delta^\alpha]$.

В статьях [12, 13] получены теоремы типа Келлога и их обращение, а также их телесное усиление для случая произвольных k и $\alpha \in (0, k)$.

Для случая произвольных модулей гладкости любого натурального порядка получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть натуральное k фиксировано, и модуль гладкости k-го порядка $\omega_k(\tau, \delta)$ функции $\tau(s)$ удовлетворяет условиям $\omega_k(\tau, \delta) \not\equiv 0$ и*

$$\int\limits_0^l \frac{\omega_k(\tau, t)}{t}\,dt < \infty. \tag{3}$$

Тогда существует непрерывная на $\overline{D}$ производная $\varphi'(z)$, не обращающаяся в нуль ни в одной точке $z \in \overline{D}$. Кроме того, имеют место оценки:

$$\omega_k(\arg \varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\mu_1(\delta)], \tag{4}$$

$$\omega_k(\log \varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\mu_2(\delta)], \tag{5}$$

$$\omega_k(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\mu_2(\delta)], \tag{6}$$

где

$$\mu_1(\delta) = \omega_k(\tau, \delta) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r_1=1}^{j-1} \cdots \sum_{r_j=1}^{r_{j-1}-1} [\omega_k(\tau, \delta)]^{\frac{k-r_1}{k}} \times$$

$$\times \int\limits_0^l \cdots \int\limits_0^l \frac{\prod\limits_{i=2}^{j} [\omega_k(\tau, x_{i-1})]^{\frac{r_{i-1}-r_i}{k}} [\omega_k(\tau, x_j)]^{\frac{r_j}{k}}}{\prod\limits_{p=1}^{j} x_p [1 + (x_p/x_{p-1})^{r_p}]}\,dx_1 \ldots dx_j, \tag{7}$$

$$\mu_2(\delta)=\int\limits_0^l \frac{\omega_k(\tau, x_1)}{x_1[1+(x_1/x_0)^k]}\,dx_1+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{r_1=1}^{j-1}\cdots\sum_{r_j=1}^{r_{j-1}-1}\int\limits_0^l\cdots\int\limits_0^l \frac{\prod\limits_{i=1}^{j}[\omega_k(\tau, x_i)]^{\frac{r_{i-1}-r_i}{k}}[\omega_k(\tau, x_{j+1})]^{\frac{r_j}{k}}}{\prod\limits_{p=1}^{j+1} x_p[1+(x_p/x_{p-1})^{r_{p-1}}]}\,dx_1\ldots dx_{j+1}. \tag{8}$$

В правых частях мажорант (7) и (8) подразумевается $x_0=\delta$, $r_0=k$.

Доказательство. Из оценок Маршу [14], с. 117, следует, что при условиях теоремы 1 применима теорема работы [7] и, следовательно, на $\bar{D}$ существует непрерывная производная $\varphi'(z)$, нигде на $\bar{D}$ не обращающаяся в нуль.

Далее, из известной теоремы Линделефа [15], с. 409, следует, что при $n\geqslant 2$ имеет место тождество

$$\omega_n(\arg\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta=\omega_n(\tau\circ s, \delta). \tag{9}$$

Кроме того, в силу результатов статьи [16]

$$\omega_n(\log|\varphi'(e^{i\vartheta})|, \delta)_\vartheta\leqslant c\int\limits_0^{2\pi}\frac{\omega_n(\arg\varphi'(e^{i\vartheta}), t)_\vartheta}{t[1+(t/\delta)^n]}\,dt, \tag{10}$$

где c — постоянная, зависящая только от n.

Из результатов работы [17] для модулей гладкости суперпозиции $\tau\circ s$ функций $\tau(s)$ и $s(\vartheta)$ вытекает оценка

$$\omega_n(\tau\circ s, \delta)\leqslant c\{\omega_n(\tau, \delta)+\sum_{j=1}^{n-1}\omega_j(\tau, \delta)\,\delta^{-j}\sum_{\substack{r_1,\ldots,r_j\geqslant 1\\ r_1+\ldots+r_j=k}}\prod_{q=1}^{j}\omega_{r_q}(s, \delta)\}, \tag{11}$$

где c — постоянная, зависящая только от k и $a=\sup\limits_{\vartheta\in[0,2\pi)}|s'(\vartheta)|$.

Существование, непрерывность и ограниченность производной $s'(\vartheta)$ вытекают из известного соотношения (см. [15], с. 405)

$$s(\vartheta)=\int\limits_0^{\vartheta}|\varphi'(e^{it})|\,\mathrm{d}t.$$

Из этого же соотношения следует, что

$$\omega_1(s, \delta)=O[\delta]. \tag{12}$$

При $n\geqslant 2$ можно применить известную оценку (см. [14], с. 116)

$$\omega_n(s, \delta)\leqslant\delta\omega_{n-1}(s', \delta). \tag{13}$$

Кроме того, для конечной функции $f(x)$, для которой $\omega_k(f, \delta)\not\equiv 0$, имеют место оценки (см. [18], с. 49)

$$\omega_r(f, \delta)\leqslant c\,[\omega_n(f, \delta)]^{\frac{r}{n}},\quad r=1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

где c — постоянные, зависящие только от n и r.

Тогда из оценок (11) — (14) следует, что

$$\omega_n(\tau \circ s, \delta) \leqslant c \left\{ \omega_n(\tau, \delta) + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_{n-j}(\tau, \delta)\, \omega_j(s', \delta) \right\}, \tag{15}$$

где c — постоянная, зависящая только от n и r.

Доказательство оценок (4) и (5) проводится индукцией по k с использованием оценок (9), (10), (14) и (15).

Оценка (6) вытекает из оценки (5) и результатов работы [17] о модулях гладкости суперпозиций функций. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *имеют место оценки*:

$$\tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\arg \varphi', \delta) = O[\mu_3(\delta)], \quad \tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\log \varphi', \delta) = O[\mu_4(\delta)],$$
$$\tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\varphi', \delta) = O[\mu_4(\delta)],$$

где $\mu_n(\delta) = \mu_{n-2}(\delta) + \delta^k \int\limits_0^l \frac{\mu_{n-2}(t)}{t^{k+1}}\, dt, \ n = 3, 4.$

Доказательство вытекает из оценок работы [17], связывающих вещественные и криволинейные равномерные модули гладкости, и из оценок Маршу.

Теорема 3. *Пусть некоторое число* $N \in [k, \infty)$ *фиксировано. Тогда при условиях теоремы* 1 *будут иметь место оценки*

$$\omega_{k,N,\bar{D}}(\log \varphi', \delta) = O[\mu_5(\delta)], \quad \omega_{k,N,\bar{D}}(\varphi', \delta) = O[\mu_5(\delta)],$$

где $\mu_5(\delta) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu_3(t)}{t\,[1 + (t/\delta)^k]}\, dt.$

Для случая $k = 1$ утверждение теоремы 3 установлено в работах [19] и [1].

Доказательство следует из теоремы 2 и теоремы работы [2] о гладкостях интеграла типа Коши.

Частным случаем теорем 1—3 будет доказанная в [13] следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $\omega_k(\tau, \delta) = O[\delta^\alpha]$, $\alpha \in (0, k)$, *то* $\varphi'(z)$ *непрерывна и не обращается в нуль на* $\bar{D}$ *и*

$$\omega_k(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta = O[\delta^\alpha], \quad \tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\varphi', \delta) = O[\delta^\alpha], \quad \omega_{k,N,\bar{D}}(\varphi', \delta) = O[\delta^\alpha].$$

Для случая $k = 1$ последнюю оценку доказал И. И. Привалов (см. [15], с. 400).

Теорема 5. *Если функция* $\varphi'(z)$ *существует и непрерывна на* $\bar{D}$, *а на* ∂D *она отлична от нуля и* $\omega_k(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta \not\equiv 0$, *то*

$$\omega_k(\tau, \delta) = O[\omega_k(\varphi'(e^{i\vartheta}), \delta)_\vartheta].$$

При доказательстве используем оценки работы [17] для модулей гладкости обратной функции.

Теорема 6. *Если функция* $\varphi'(z)$ *существует и непрерывна на* $\bar{D}$, *а на* ∂D *она отлична от нуля и* $\tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\varphi', \delta) \not\equiv 0$, *то имеет место оценка*

$$\omega_k(\tau, \delta) = O[\mu_6(\delta)],$$

где $\mu_6(\delta) = \tilde{\omega}_{k,1,\partial D}(\varphi', \delta) + \delta^k \int\limits_0^l \frac{\omega_{k,1,\partial D}(\varphi', t)}{t^{k+1}}\, dt.$

Доказательство теоремы 6 вытекает из теоремы 5, из оценок работы [17], связывающих вещественные и криволинейные равномерные модули гладкости, и из оценок Маршу.

Для модулей гладкости производной $\psi'(w)$ функции Римана $\psi(w)$ области G установлены следующие результаты.

Теорема 7. *Если*

$$\int_0^l \frac{\omega_k(\tau, t)}{t}\, dt < \infty,$$

то существует производная $\psi'(w)$, *непрерывная и не обращающаяся в нуль на* $\overline{G}$, *а на* Γ *удовлетворяющая условиям*

$$\tilde{\omega}_{k,1,\Gamma}(\arg\psi', \delta) = O[\mu_7(\delta)], \quad \tilde{\omega}_{k,1,\Gamma}(\log\psi', \delta) = O[\mu_8(\delta)],$$

$$\tilde{\omega}_{k,1,\Gamma}(\psi', \delta) = O[\mu_8(\delta)],$$

где

$$\mu_7(\delta) = \mu_5(\delta) + \delta^{1-k(k-3)/2} \int_0^l \frac{\mu_5(y)}{y^{k+1}}\, dy \left(\delta^k \int_0^l \frac{\mu_4(t)}{t^k}\, dt\right)^{\frac{k(k+1)/2-1}{k}},$$

$$\mu_8(\delta) = \mu_6(\delta) + \delta^{1-k(k-3)/2} \int_0^l \frac{\mu_6(y)}{y^{k+1}}\, dy \left(\delta^k \int_\delta^l \frac{\mu_4(t)}{t^k}\, dt\right)^{\frac{k(k+1)/2-1}{k}}.$$

Доказательство вытекает из связи функций $\varphi'(z)$ и $\psi'(w)$ и теоремы 6.

Замечание. Для интегральных модулей гладкости имеют место аналоги теорем 1 и 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения. К., «Наук. думка», 1975. 270 с.
2. Тамразов П. М. Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения. Препринт ИМ-75-10. К., 1975. 24 с.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967. 375 с.
4. Kellog O. D. Harmonic functions and Green's integral. — Trans. Amer. Math. Soc., 1912, **13**, p. 109—132.
5. Warschawski S. E. Über ein satz von O. D. Kellog — Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, 1932, N 1, S. 73—86.
6. Геронимус Я. Л. О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге. — ДАН СССР, 1954, **98**, № 6, с. 889—861.
7. Warschawski S. E. On differentiability at the boundary in conformal mappings. — Proc. Amer. Math. Soc., 1961, **12**, N 4, p. 614—620.
8. Ou So-mo. On some boundary properties of conformal mappings. — Sci. Sinica, 1958, **7**, N 2, p. 131—136.
9. Альпер С. Я. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутых областях. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, **19**, № 6, с. 423— 444.
10. Ковальчук Р. Н. Об одном обобщении теоремы Келлога. — УМЖ, 1965, **7**, № 4, с. 104—108.
11. Колесник Л. И. Обращение теоремы типа Келлога. — УМЖ, 1969, **21**, № 1, с. 104—108.
12. Карупу Е. В. О конечно-разностных гладкостях конформных отображений. Препринт ИМ-77-6. К., 1977. 12 с.
13. Карупу Е. В. Модули гладкости конформных гомеоморфизмов. Препринт ИМ-77-11. К., 1977. 12 с.
14. Тиман М. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960. 624 с.
15. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1966. 626 с.

16. Б а р и Н. К., С т е ч к и н С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальны свойства двух сопряженных функций. — Труды Моск. мат. о-ва, 1956, **5**, с. 483—522
17. Т а м р а з о в П. М. Конечно-разностные тождества и оценки модулей гладкост суперпозиции функций. Препринт ИМ-77-5. К., 1977. 24 с.
18. Т р и г у б Р. М. Приближение функций с данным модулем гладкости на внешност отрезка и полуоси. — В кн. Исследования по современным проблемам конструктивно теории функций. М., Физматгиз, 1961, с. 47—51.
19. Т а м р а з о в П. М. Контурные и телесные свойства голоморфных функций в ком плексной области. — ДАН СССР, 1972, **204**, № 3, с. 565—568.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакци
24.X. 1977 г