УДК 517.925.34

С. К. Норкин

О размерности множества, покрытого интегральными кривыми, примыкающими к особой точке многомерной системы

1. Рассмотрим систему

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx} = P(y,z) + f_1(x,y,z),$$
$$\alpha(x)\frac{dz}{dx} = Q(y,z) + f_2(x,y,z), \tag{1}$$

где $x \in R$, $y \in R^k$, $z \in R^{n+k}$; $\alpha: R \to R$, $P: R^n \to R^k$, $Q: R^n \to R^{n-k}$, $f_1: R^{n+1} \to R^k$, $f_2: R^{n+1} \to R^{n-k}$, определенную в области

$$S = \{(x, y, z) \mid 0 < x < a, \ \|y\| < b, \ \|z\| < b\}, \tag{2}$$

a, $b \in R$, значение $b > 0$ полагаем как угодно малым, если считать достаточно малым $a > 0$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Для существования решений системы (1) в области (2) предполагаем: α, P, Q, f_1, $f_2 \in \mathbf{C}(S)$ и дополнительно требуем, чтобы отображения α, P, Q, f_1, f_2 обладали свойствами, обеспечивающими единственность интегральной кривой, проходящей через любую точку области S.

При выполнении условий

$$\alpha(x) > 0, \ x \in (0, a); \int_0^{x_0} \frac{dx}{\alpha(x)} = +\infty, \ x_0 \in (0, a), \tag{3}$$

$$\operatorname{sign}[\|P(y,z)\| + \|Q(y,z)\|] = \operatorname{sign}(\|y\| + \|z\|), \tag{4}$$

$$\forall_{\|y\|<b} y \ \forall_{\|z\|<b} z \ [\|f_i(x,y,z)\| = o(1) \text{ при } x \to +0, \ i = 1, 2] \tag{5}$$

возникает задача о существовании интегральных кривых $\{x, y(x), z(x)\}$ системы (1) в области (2), обладающих свойством: $\|y(x)\| + \|z(x)\| = o(1)$ *при*

$x \to +0$. Такие интегральные кривые будем называть O-кривыми, а подмножество $\mathfrak{M}$ области S, покрытое O-кривыми, — O-множеством.

В работах [1—5] вопрос о существовании O-множества решался на основании предположения об асимптотической устойчивости тривиального решения некоторой вспомогательной автономной системы.

В предлагаемой работе указываются достаточные условия для существования O-множества $\mathfrak{M}$ и находится размерность $\mathfrak{M}$. Кроме того, устанавливается оценка для O-кривых, покрывающих множество $\mathfrak{M}$.

2. Установим существование множества $\mathfrak{M}$. Пусть вектор-функции P, Q, f_1, f_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$(y, P(y, z)) < 0, \tag{6}$$

если $\|y\| \neq 0$;

$$(z, Q(y, z)) \geqslant L\|z\|^2 - \lambda(\|y\|^2 + \|z\|^2), \tag{7}$$

где $L, \lambda \in R$; $L > 0$, $\lambda \geqslant 0$;

$$\|f_i(x, y, z)\| \leqslant d(x)(\|y\| + \|z\|), \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

где $d \in C(0, a)$; $d(x) > 0$, $x \in (0, a)$.

Лемма 1. *Если выполнены условия* (6) — (8) *для системы* (1) *в области* (2), *интеграл*

$$h(x) = \int_0^x \frac{d(s)}{\alpha(s)} \exp \int_x^s \frac{L - 2\lambda}{\alpha(\xi)} d\xi\, ds \tag{9}$$

сходится и

$$4h(x) \leqslant 1, \quad x \in (0, a), \tag{10}$$

то для любых $x_0 \in (0, a)$, $\|z_0\| < b$ *найдется по крайней мере одно значение* y_0, $\|y_0\| < b$ *такое, для которого существует решение* $\{y(x), z(x)\}$ *системы* (1) *на левом максимальном промежутке существования* $(\omega, x_0]$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \tag{11}$$

Доказательство. Введем множества

$$\Omega = \{(x, y, z) \in S \,|\, \|y\| \leqslant 4h(x)\|z\|, \ \|z\| \neq 0\}, \tag{12}$$

$$\partial\Omega = \{(x, y, z) \in S \,|\, \|y\| = 4h(x)\|z\|, \ \|z\| \neq 0\}.$$

Обозначим $u = \|y\|^2 - 16h^2(x)\|z\|^2$. В силу системы (1) имеем

$$\frac{1}{2}\alpha(x)\frac{du}{dx} = (y, P(y, z) + f_1(x, y, z)) - 16h^2(x)(z, Q(y, z) + f_2(x, y, z)) -$$
$$- 16h'(x)h(x)\alpha(x)\|z\|^2.$$

Определим знак $\frac{du}{dx}$ на границе $\partial\Omega$ области Ω. Так как на $\partial\Omega$ $\|y\| \neq 0$, то учитывая условия (6) — (8), получаем

$$\frac{1}{2}\alpha(x)\frac{du}{dx} < \|y\| d(x)(\|y\| + \|z\|) - 16h^2(x)L\|z\|^2 + 16h^2(x)\lambda(\|y\|^2 +$$
$$+ \|z\|^2) + 16h^2(x)\|z\| d(x)(\|y\| + \|z\|) - 16\alpha(x)h'(x)h(x)\|z\|^2.$$

В силу (10) на $\partial\Omega$ $\|y\| = 4h(x)\|z\|$ и $\|y\| \leqslant \|z\|$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\alpha(x)\frac{du}{dx} < -16\alpha(x)h'(x)h(x)\|z\|^2 - 16h^2(x)(L-2\lambda)\|z\|^2 +$$

$$+8h(x)d(x)\|z\|^2 + 32h^2(x)d(x)\|z\|^2 \leqslant -16\alpha(x)h'(x)h(x)\|z\|^2 -$$

$$-16h^2(x)(L-2\lambda)\|z\|^2 + 8h(x)d(x)\|z\|^2 + 8h(x)d(x)\|z\|^2 =$$

$$= -16h(x)\|z\|^2[\alpha(x)h'(x) + (L-2\lambda)h(x) - d(x)].$$

Отображение $h(x)$, определяемое равенством (9), — решение дифференциального уравнения $\alpha(x)h' + (L-2\lambda)h - d(x) = 0$. Значит, на $\partial\Omega$ $\frac{du}{dx} < 0$.

Таким образом, $\partial\Omega = \Omega_{se}$, где Ω_{se} — множество точек строгого выхода из области Ω при убывании x.

Обозначим

$$\Sigma = \{(x_0, y, z_0) \in \Omega \mid \|y\| \leqslant 4h(x_0)\|z_0\|\}.$$

Тогда

$$\Sigma \cap \Omega_{se} = \{(x_0, y, z_0) \in \Omega \mid \|y\| = 4h(x_0)\|z_0\|\}.$$

Множество $\Sigma \cap \Omega_{se}$ не будет ретрактом для Σ, так как $\Sigma \cap \Omega_{se}$ — граница шара Σ. Множество $\Sigma \cap \Omega_{se}$ — ретракт для Ω_{se}, так как отображение

$$\pi(x, y, z) = \left(x_0, \frac{h(x_0)\|z_0\|}{h(x)\|z\|}y, z_0\right)$$

непрерывно на Ω_{se} и будет ретракцией Ω_{se} на $\Sigma \cap \Omega_{se}$. Применение топологического принципа Важевского [6], с. 333, завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (6) — (10). *Тогда решение* $\{y(x), z(x)\}$ *задачи Коши* (1), (11) *будет удовлетворять на промежутке* $(\omega, x_0]$ *оценкам*

$$\|y(x)\| \leqslant 4h(x)\|z(x)\|, \tag{13}$$

$$\|z(x)\| \leqslant \|z_0\| \exp\int_x^{x_0} \frac{-L + 2\lambda + 2d(s)}{\alpha(s)}ds, \tag{14}$$

причем $\omega = 0$, *если правая часть неравенства* (14) *меньше* b.

Доказательство. Неравенство (13) непосредственно следует из (12) и доказательства леммы 1, так как существование решения задачи Коши (1), (11) установлено в области Ω.

Докажем справедливость неравенства (14). В силу (13) и (10) имеем $\|y(x)\| \leqslant \|z(x)\|$. Поэтому согласно (7), (8) получим

$$\alpha(x)\frac{d\|z\|}{dx} \geqslant [L - 2\lambda - 2d(x)]\|z\|.$$

Разделяя переменные, умножая неравенство на -1, интегрируя от x до x_0 $(x \leqslant x_0)$, получаем (14).

Равенство $\omega = 0$ вытекает из теоремы о продолжении решения (см. [6], с. 26), так как если правая часть (14) меньше b, то и правая часть (13) в силу (10) также меньше b, и решение остается в области (2). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6) — (8). *Если*

$$d(x) \leqslant l, \tag{15}$$

когда $x \in (0, a)$, $l \in R$, $l > 0$,

$$l \leqslant \frac{L - 2\lambda}{4}, \tag{16}$$

то в области (2) *существует О-множество* $\mathfrak{M}$ *системы* (1), *а для О-кривых, покрывающих* $\mathfrak{M}$, *когда* $x \in (0, x_0]$, *справедливы оценки*

$$\| y(x) \| \leqslant \frac{4l \| z_0 \|}{L - 2\lambda} \exp\left(-2l \int_x^{x_0} \frac{ds}{\alpha(s)}\right), \tag{17}$$

$$\| z(x) \| \leqslant \|z_0\| \exp\left(-2l \int_x^{x_0} \frac{ds}{\alpha(s)}\right). \tag{18}$$

Доказательство. Для интеграла (9), учитывая (15), имеем

$$h(x) \leqslant \int_0^x \frac{l}{\alpha(s)} \exp \int_x^s \frac{L - 2\lambda}{\alpha(\xi)} d\xi ds = \frac{l}{L - 2\lambda} \int_0^x \exp \int_x^s \frac{L - 2\lambda}{\alpha(\xi)} d\xi \times$$

$$\times d\left(\int_x^s \frac{L - 2\lambda}{\alpha(\xi)} d\xi\right) = \frac{l}{L - 2\lambda}\left(1 - \exp \int_x^0 \frac{L - 2\lambda}{\alpha(\xi)} d\xi\right).$$

Поэтому сходится интеграл (9), так как по условию (3) расходится интеграл $\int_0^{x_0} \frac{dx}{\alpha(x)}$, а из (16) следует, что $L - 2\lambda > 0$.

Итак,

$$h(x) \leqslant \frac{l}{L - 2\lambda}, \ x \in (0, x_0]. \tag{19}$$

Отсюда, в силу неравенства (16), получаем справедливость условия (10). Таким образом, имеют место утверждения лемм 1 и 2.

Так как (15), (16) дают неравенство $-L + 2\lambda + 2d(x) \leqslant -2l$, то

$$\int_x^{x_0} \frac{-L + 2\lambda + 2d(s)}{\alpha(s)} ds \leqslant -2l \int_x^{x_0} \frac{ds}{\alpha(s)}.$$

Поэтому из (14) вытекает (18), а из (13), в силу (19), вытекает (17),

Решения задачи Коши (1), (11), удовлетворяющие оценки (17), (18), дают на основании условия (3) O-кривые, лежащие в области S. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $d(x) = o(1)$ *при* $x \to +0$, *то теорема* 1 *остается справедливой, когда* $L > 2\lambda$, *причем* l *нужно считать как угодно малой величиной.*

3. Найдем размерность множества $\mathfrak{M}$. Пусть вектор-функции P, Q, f_1, f_2 удовлетворяют условиям:

$$(y_2 - y_1, P(y_2, z_2) - P(y_1, z_2)) < 0, \tag{20}$$

если $y_2 \neq y_1$;

$$(z_2 - z_1, Q(y_2, z_2) - Q(y_1, z_1)) \geqslant L\|z_2 - z_1\|^2 - \lambda(\|y_2 - y_1\|^2 + \|z_2 - z_1\|^2), \tag{21}$$

где $L, \lambda \in R$; $L > 0$, $\lambda \geqslant 0$;

$$\|f_i(x, y_2, z_2) - f_i(x, y_1, z_1)\| \leqslant d(x)(\|y_2 - y_1\| + \|z_2 - z_1\|), \ i = 1, 2 \tag{22}$$

(здесь $d \in C(0, a)$; $d(x) > 0$, $x \in (0, a)$);

$$\|f_i(x, 0, 0)\| \equiv 0, \ i = 1, 2. \tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (20) — (23). *Если*

$$L > 2\lambda \tag{24}$$

и сходится интеграл

$$\int_0^{x_0} \frac{d(x)}{\alpha(x)}\, dx, \tag{25}$$

то

$$\dim \mathfrak{M} = n - k + 1. \tag{26}$$

Доказательство. Положим в условиях (20) — (22) $(y_1, z_1) = (0, 0)$, $(y_2', z_2) = (y, z)$. Учитывая условия (4), (23), получаем неравенства (6) — (8). Кроме того, из условия (3) и сходимости интеграла (25) следует, что

$$d(x) = o(1) \ \text{при} \ x \to +0. \tag{27}$$

Поэтому требование (24) обеспечивает справедливость следствия.

Итак, в области (2) существует O-множество $\mathfrak{M}$, причем, согласно лемме 1, для любых $x_0 \in (0, a)$, $\|z_0\| < b$ существует $y = g(x_0, z_0)$, $\|g(x_0, z_0)\| < b$ такое, для которого

$$(x_0, g(x_0, z_0), z_0) \in \mathfrak{M}. \tag{28}$$

Обозначим

$$\mathfrak{N} = \{(x, z) \mid 0 < x < a, \ \|z\| < b\}. \tag{29}$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, определяемое соответствием

$$(x, z) \in \mathfrak{N} \Rightarrow (x, y, z)) \in \mathfrak{M}, \tag{30}$$

где $y = g(x, z)$, однозначно.

Допустим противное, а именно, существует точка $(x_0, z_0) \in \mathfrak{N}$ такая, для которой $(x_0, y_0^{(1)}, z_0)$, $(x_0, y_0^{(2)}, z_0) \in \mathfrak{M}$ и

$$y_0^{(1)} \neq y_0^{(2)}. \tag{31}$$

Тогда система (1) имеет две O-кривые $\{x, y_1(x), z_1(x)\}$, $\{x, y_2(x), z_2(x)\}$, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_0^{(1)}, \ z_1(x_0) = z_0, \ y_2(x_0) = y_0^{(2)}, \ z_2(x_0) = z_0. \tag{32}$$

Полагая $v = \|y_2 - y_1\|^2 - \|z_2 - z_1\|^2$, учитывая условия (20) — (22), в силу системы (1) находим

$$\frac{1}{2}\alpha(x)\frac{dv}{dx} \leqslant d(x)(\|y_2 - y_1\| + \|z_2 - z_1\|)\|y_2 - y_1\| - L\|z_2 - z_1\|^2 +$$

$$+ \lambda(\|y_2 - y_1\|^2 + \|z_2 - z_1\|^2) + d(x)(\|y_2 - y_1\| + \|z_2 - z_1\|)\|z_2 - z_1\| \leqslant$$

$$\leqslant -L\|z_2 - z_1\|^2 + \lambda(\|y_2 - y_1\|^2 + \|z_2 - z_1\|^2) +$$

$$+ 2d(x)(\|y_2 - y_1\|^2 + \|z_2 - z_1\|^2).$$

На основании (27) значение x_0 выбираем настолько малым, чтобы, когда $x \in (0, x_0]$, $d(x) \leqslant \frac{L}{4} - \frac{\lambda}{2}$.

Поэтому

$$\frac{dv}{dx} \leqslant \frac{L}{\alpha(x)} v. \tag{33}$$

Обозначим

$$X = \{x \in (0, x_0] \mid v(s) > 0,\ s \in [x, x_0]\}. \tag{34}$$

На основании условий (31), (32) $X \neq \varnothing$.

Введем

$$x^* = \inf X. \tag{35}$$

Из непрерывности отображения $v(x)$ для интегральных кривых следует, что

$$v(x^*) = 0. \tag{36}$$

Убедимся, что

$$x^* = 0. \tag{37}$$

В самом деле, если $x^* \neq 0$, то, интегрируя (33) от x^* до x ($x^* \leqslant x \leqslant x_0$) и учитывая (36), получаем

$$v(x) \leqslant \int_{x^*}^{x} \frac{L}{\alpha(s)} v(s)\, ds.$$

Применяя лемму Гроноулла (см. [6], с. 37), получаем тождество $v(x) \equiv 0$, $x \in [x^*, x_0]$, противоречащее (34), (35).

Таким образом, из равенства (37) на основании (34) вытекает

$$v(x) = \| y_2 - y_1 \|^2 - \| z_2 - z_1 \|^2 > 0,\ \ x \in (0, x_0],$$

или

$$\| z_2 - z_1 \| < \| y_2 - y_1 \|, \quad x \in (0, x_0].$$

Отсюда, в силу системы (1) и условий (20), (22), имеем неравенство

$$\alpha(x) \frac{d \| y_2 - y_1 \|}{dx} \leqslant 2d(x) \| y_2 - y_1 \|.$$

Разделяя в нем переменные, затем интегрируя от x до x_0 и применяя неравенство Гроноулла, находим, что

$$\| y_2(x_0) - y_1(x_0) \| \leqslant \| y_2(x) - y_1(x) \| \exp \int_0^{x_0} \frac{2d(s)}{\alpha(s)}\, ds, \tag{38}$$

так как сходится интеграл (25).

Функции $y_2(x)$ и $y_1(x)$ — компоненты O-кривых. Следовательно, правая часть неравенства (38) стремится к нулю, когда $x \to +0$. Для начальных условий (32) выполняется неравенство $\| y_0^{(2)} - y_0^{(1)} \| = \| y_2(x_0) - y_1(x_0) \| \leqslant \leqslant 0$. Получили противоречие условию (31). Тем самым однозначность отображения (30) доказана.

Непрерывность отображения (30) следует из интегральной непрерывности.

Очевидно, что обратное отображение $(x, y, z) \to (x, z)$ для (30) также однозначно и непрерывно.

Итак, отображение (30) — гомеоморфизм. Поэтому равенство (26) вытекает из очевидного равенства $\dim \mathfrak{N} = n - k + 1$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* (21) — (25) *и*

$$y_2 - y_1, P(y_2, z_2) - P(y_1, z_1)) \leqslant - L \| y_2 - y_1 \|^2 + \lambda (\| y_2 - y_1 \|^2 + \| z_2 - z_1 \|^2).$$

Если $d(x) \leqslant l$, *где* $l \in R$; $l > 0$, $x \in (0, a)$, $l \leqslant \dfrac{L - 2\lambda}{2}$, *то справедливо равенство* (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. А н д р е е в А. Ф. К проблеме различения для N_2 в R^n. — Дифференц. уравнения, 1973, **9**, № 5, с. 791—796.
2. Б о д у н о в Н. А. О многообразиях O-кривых многомерных систем. — Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 5, с. 914—917.
3. Н о р к и н С. К. Единственность O-кривой вдоль направления, аналогичного исключительному. — Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 4, с. 758—759.
4. Н о р к и н С. К. Проблема различения для нормальной области N_4 в пространстве R^3. — Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 2, с. 263—271.
5. Н о р к и н С. К. О множестве интегральных кривых, входящих в особую точку. — УМЖ, 1975, **27**, № 2, с. 250—255.
6. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970. 720 с.

Одесский
политехнический институт

Поступила в редакцию
4.I. 1977 г.