УДК 517.948.34

Г. П. Хома, Е. А. Гаева

О методе усреднения для гиперболических интегро-дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными

Принцип усреднения Боголюбова—Митропольского широко применяется при исследовании колебательных процессов, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных [1, 2].

Для систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений схемы усреднения впервые предложил и обосновал А. Н. Филатов (см., например, [3]).

В данной работе рассматривается усреднение гиперболических интегро-дифференциальных систем первого порядка в частных производных.

Рассмотрим систему m интегро-дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-функции u с компонентами $u_1, u_2, \ldots, u_m$

$$Du = \varepsilon F\left(\eta, t, u, \int_0^t \varphi(\eta, t, s, u, (x, s))\, ds\right), \qquad (1)$$

где D — диагональная матрица с компонентами $D_i = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x}$ $(i = \overline{1, m})$, $\lambda_i(x, t)$ — известные действительные функции, $F(\eta, t, u, w)$ — вектор-функция, в общем случае нелинейная, $\eta = \varepsilon x$, ε — малый параметр.

Пусть для системы (1) заданы начальные условия

$$u(x, 0) = g(\eta) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \qquad (2)$$

где $g(\eta)$ — вектор-функция с компонентами $g_1(\eta), g_2(\eta), \ldots, g_m(\eta)$.

Схемы усреднения, развитые и обоснованные для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений в [3], могут быть распространены и на системы интегро-дифференциальных уравнений вида (1).

Рассмотрим следующую схему усреднения. Вычислим интеграл $\int_0^t \varphi(\eta, t, s, u)\, ds$ по явно входящему переменному s, считая η, t, u параметрами. Имеем

$$\int_0^t \varphi(\eta, t, s, u)\, ds = f(\eta, t, u).$$

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(\eta, t, u, f(\eta, t, u))\, dt = F^0(\eta, u). \qquad (3)$$

Системе (1) поставим в соответствие систему дифференциальных уравнений

$$Dv = \varepsilon F^0(\eta, v), \qquad (4)$$

для которой заданы те же начальные условия, т. е.

$$v(x, 0) = g(\eta) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \qquad (5)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема (об усреднении). *Пусть вектор-функция* $\lambda(x, t) = \{\lambda_1(x, t), \ldots, \lambda_m(x, t)\}$ *определена на множестве* $\Pi = \{(x, t) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$, *а вектор-функции* $F(\eta, t, u, w)$ *и* $\varphi(\eta, t, s, u)$ — *на множестве* $\Omega=\{(x, t)\in \Pi,$ $t\geqslant s\geqslant 0,\ u\in G\subset R^m,\ w\in R^1\}$ *и на этих множествах выполнены условия:*

1) $\lambda(x, t)\in C^1_{\Pi}$ *и* $|\lambda_i(x, t)|\leqslant K \quad (\forall i=\overline{1, m})$;

2) $g(\eta)\in C^1_{[0,l]}$ *и* $g(\eta)=u(x, 0)\in G$;

3) *функции* $F_i(\eta, t, u, w)$ *непрерывны по* t *и удовлетворяют условию Липшица*

$$|F_i(\tilde{\eta}, t, \tilde{u}, \tilde{w})-F_i(\eta, t, u, w)|\leqslant \nu\left\{|\tilde{\eta}-\eta|+|\tilde{w}-w|+\sum_{k=1}^{m}|\tilde{u}_k-u_k|\right\}$$

$$(i=\overline{1, m});$$

4) $\varphi_i(\eta, t, s, u)$ *непрерывны по* t, s *и удовлетворяют условию Липшица*

$$|\varphi_i(\tilde{\eta}, t, s, \tilde{u})-\varphi_i(\eta, t, s, u)|\leqslant \mu_i(t, s)\left\{|\tilde{\eta}-\eta|+\sum_{k=1}^{m}|\tilde{u}_k-u_k|\right\},$$

причем

$$\frac{1}{t}\int_0^t d\tau\int_0^{\tau}\mu_i(\tau, s)\, ds\to 0 \text{ при } t\to\infty \quad (i=\overline{1, m});$$

5) *равномерно относительно* $x\in[0, l]$, $u\in G$ *существует предел* (3), *причем*

$$|F_i^0|\leqslant K_1;\quad \left|\frac{\partial F_i^0}{\partial \eta}\right|\leqslant K_2;\quad \left|\frac{\partial F_i^0}{\partial u_j}\right|\leqslant K_3\quad (K_1, K_2, K_3=\mathrm{const};\ i, j=\overline{1, m});$$

6) *непрерывное решение* $v(x, t)$ *задачи Коши* (4), (5), *определенное на ограниченном замкнутом множестве* Π [4, 5], *лежит в области* G *с некоторой* ρ*-окрестностью.*

Тогда $\forall\gamma>0$ *и* $\forall L>0$ $\exists\varepsilon_0$ *такое, что при* $\varepsilon<\varepsilon_0$ *будет выполняться неравенство*

$$|u_i(x, t)-v_i(x, t)|<\gamma\quad (\forall (x, t)\in \Pi_g\cap \Pi_{\frac{L}{\varepsilon}};\quad i=\overline{1, m}),$$

где $u(x, t)$ — *непрерывное решение задачи Коши* (1), (2), $\Pi_{\frac{L}{\varepsilon}}=\left\{(x, t)\in R^2:\right.$ $\left.0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant \dfrac{L}{\varepsilon}\right\}$.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что при выполнении условий теоремы производные $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial v_i}{\partial x}$ решения $v(x, t)$ задачи Коши (4), (5) ограничены и пропорциональны ε. Продифференцировав по x равенство

$$v_i(x, t)=g_i(\varepsilon x_i^0)+\varepsilon\int_0^t F_i^0(\varepsilon x_i, \tau, v(x_i, \tau))\, d\tau\quad (\forall (x, t)\in \Pi_g,\ i=\overline{1, m}),$$

где $x_i=x_i(\tau;\ x, t)$ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$ — решение начальной задачи $(x_i(t;\ x, t)=$ $=x\in[0, l])$ уравнения характеристик $\dfrac{dx}{dt}=\lambda_i(x, t)$ $(i=\overline{1, m})$ системы (4) (см. [4], с. 461), $x_i(0;\ x, t)=x_i^0$, получим

$$\frac{\partial v_i}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial g_i}{\partial\eta_i}\frac{\partial x_i}{\partial x}+\varepsilon^2\int_0^t\frac{\partial F_i^0}{\partial\eta_i}\frac{\partial x_i}{\partial x}\, d\tau+\varepsilon\int_0^t\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i^0}{\partial v_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x}\, d\tau\quad (i=\overline{1, m}).$$

Отсюда, полагая $\alpha = \max\limits_{i;\eta}\left|\frac{dg_i}{d\eta}\right|$, $K_4 = \max\limits_{i;(x,t)\in\Pi_g}\left|\frac{\partial x_i}{\partial x}\right|$ (ограниченность производной $\frac{\partial x_i}{\partial x}$ следует из условия 1) теоремы работы [6], с. 83) и $V(t) = \max\limits_{j;x;\tau\leqslant t}\left|\frac{\partial v_j}{\partial x}\right|$, имеем

$$V(t) \leqslant \varepsilon(\alpha + K_2L)K_4\exp\{mK_3K_4L\} \equiv \varepsilon C_1.$$

Из системы (4) получаем

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial t}\right| \leqslant \varepsilon KC_1 + \varepsilon K_2 \equiv \varepsilon C_2 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Имеем

$$|u_i(x, t) - v_i(x, t)| \leqslant \varepsilon\left|\int\limits_0^t\left[F_i\left(\eta_i, \tau, u(x_i, \tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\xi_i, \tau, s, u(\theta_i, s))\,ds\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left.- F_i\left(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\xi_i, \tau, s, v(\theta_i, s))\,ds\right)\right]d\tau\right| +$$
$$+ \varepsilon\left|\int\limits_0^t\left[F_i\left(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\xi_i, \tau, s, v(\theta_i, s))\,ds\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left.- F_i\left(h_i, \tau, v(x_i, \tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\eta_i, \tau, s, v(x_i, \tau))\,ds\right)\right|d\tau\right| +$$
$$+ \varepsilon\left|\int\limits_0^t\left[F_i\left(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\eta_i, \tau, s, v(x_i, \tau))\,ds\right) - F_i(\eta_i, v(x_i, \tau))\right]d\tau\right. =$$
$$= I_{1i} + I_{2i} + I_{3i} \quad (i = \overline{1, m}), \tag{6}$$

где $\eta_i = \varepsilon x_i$, $\xi_i = \eta_i(s; x, \tau)$, $\theta_i = x_i(s; x, \tau)$. Оценивая слагаемые в выражении (6), получаем

$$I_{1i} \leqslant \varepsilon\nu\int\limits_0^t\sum_{k=1}^m|u_k(x_i, \tau) - v_k(x_i, \tau)|\,d\tau +$$
$$+ \varepsilon\nu\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \mu_i(\tau, s)\sum_{k=1}^m|u_k(\theta_i, s) - v_k(\theta_i, s)|\,ds, \tag{7}$$

$$I_{2i} \leqslant \varepsilon\nu\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \mu_i(\tau, s)\left\{|\xi_i - \eta_i| + \sum_{k=1}^m|v_k(\theta_i, s) - v_k(x_i, \tau)|\right\}d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2\nu\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \mu_i(\tau, s)\{(1 + mC_1)|x_i(s; x, \tau) - x_i(\tau; x, t)| + mC_2|s - \tau|\}\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\nu L\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \mu_i(\tau, s)\{(1 + mC_1)(K + K_5) + mC_2\}\,ds = \varepsilon b\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \mu_i(\tau, s)\,ds,$$

где

$$b = \nu L[(1 + mC_1)(K + K_5) + mC_1], \quad K_5 = \max_{i;\tau\leqslant t;(x,t)\in\Pi_g}\left|\frac{\partial x_i(\tau; x, t)}{\partial t}\right|.$$

Положим

$$\int_0^\tau \mu_i(\tau, s)\, ds = \mu_i^0(\tau), \qquad \frac{1}{t}\int_0^t \mu_i^0(\tau)\, d\tau = \overline{\mu}_i^0(t),$$

тогда $\varepsilon \int_0^t \mu_i^0(\tau)\, d\tau = \varepsilon t \overline{\mu}_i^0(t) \leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau \overline{\mu}_i^0\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \equiv \delta_i(\varepsilon)$, $\delta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ($\forall i = \overline{1, m}$).

Следовательно,

$$I_{2i} \leqslant b\delta_i(\varepsilon). \tag{8}$$

Покажем, что для любого числа $a > 0$, всегда можно указать такое ε_1, для которого при $\varepsilon < \varepsilon_1$ будет выполняться неравенство

$$\sup_i I_{3i} < a \quad (\forall (x, t)\, \Pi_{\frac{L}{\varepsilon}}). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$F_i\left(\eta, \tau, v, \int_0^\tau \varphi(\eta, \tau, s, v(x, \tau))\, ds\right) \equiv F_i(\eta, \tau, v, f(\eta, \tau, v(x, \tau))) \equiv$$

$$\equiv \overline{F}_i(\eta, \tau, v(x, \tau)),$$

$$\overline{F}_i(\eta, \tau, v(x, \tau)) - F_i^0(\eta, v(x, \tau)) \equiv \psi_i(\eta, \tau, v(x, \tau)).$$

Тогда

$$I_{3i} = \varepsilon \left| \int_0^t \psi_i(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau))\, d\tau \right|.$$

Заметим, что функции $\overline{F}_i$ удовлетворяют условию Липшица

$$|\overline{F}_i(\tilde{\eta}, \tau, \tilde{v}) - \overline{F}_i(\eta, \tau, v)| \leqslant \nu \left\{ |\tilde{\eta} - \eta| + |f_i(\tilde{\eta}, \tau, \tilde{v}) - f_i(\eta, \tau, v)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^m |\tilde{v}_k - v_k| \right\} \leqslant \nu(1 + \mu_i^0(\tau)) \left\{ |\tilde{\eta} - \eta| + \sum_{k=1}^m |\tilde{v}_k - v_k| \right\} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Следовательно, функции ψ_i будут удовлетворять условию Липшица

$$\psi_i(\tilde{\eta}, \tau, \tilde{v}) - \psi_i(\eta, \tau, v)| \leqslant (\nu + \nu\mu_i^0(\tau) + K_2 + K_3) \left\{ |\tilde{\eta} - \eta| + \sum_{k=1}^m |\tilde{v}_k - v_k| \right\}$$

$$(i = \overline{1, m}).$$

Для оценки интеграла I_{3i} разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на p частей точками $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{L}{p\varepsilon}$, $t_2 = \frac{2L}{p\varepsilon}, \ldots, t_p = \frac{L}{\varepsilon}$. Предположим, что $t \in [t_k, t_{k+1}]$ для некоторого k $(0 \leqslant k \leqslant p - 1)$. Имеем

$$I_{3i} \leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\psi_i(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau)) - \psi_i(\eta_i^j, \tau, v^j)|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_{t_k}^t |\psi_i(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau)) - \psi_i(\eta_i^k, \tau, v^k)|\, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\psi_i(\eta_i^j, \tau, v^j)|\, d\tau + \varepsilon \int_{t_k}^t |\psi_i(\eta_i^k, \tau, v^k)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\psi_i(\eta_i, \tau, v(x_i, \tau) - \psi_i(\eta_i^j, \tau, v^j)| \, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} \int_{0}^{t_{j+1}} |\psi_i(\eta_i^j, \tau, v^j)| \, d\tau + \varepsilon \sum_{j=1}^{p-1} \int_{0}^{t_j} |\psi_i(\eta_i^j, \tau, v^j)| \, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t |\psi_i(\eta_i^k, \tau, v^k)| \, d\tau = N_{1i} + N_{2i} + N_{3i} + N_{4i},$$

где $\eta_i^j = \varepsilon x_i(t_j; x, t)$, $v^j = v(x_i(t_j; x, t), t_j)$.

Оценим слагаемые в последнем выражении:

$$N_{1i} \leqslant \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\nu + \nu\mu_i^0(\tau) + K_2 + K_3) \left\{ |\eta_i - \eta_i^j| + \sum_{k=1}^{m} |v_k(x_i, \tau) - v_k(x_i^j, t_j)| \right\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 [K + m(C_1 K + C_2)] \sum_{j=0}^{p-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\nu + \nu\mu_i^0(\tau) + K_2 + K_3) |\tau - t_j| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p} \delta_i(\varepsilon), \tag{10}$$

где $2a_1 = (\nu + K_2 + K_3)[K + m(C_1 K + C_2)] L^2$, $a_2 = \nu L [K + m(C_1 K + C_2)]$.

Введем обозначение

$$\Phi(t) = \sup_{i;\eta;v \in G} \left| \frac{1}{t} \int_0^t [F_i(\eta, \tau, v, f(\eta, \tau, v)) - F_i^0(\eta, v)] \, d\tau \right|.$$

Поскольку предел (3) существует равномерно относительно η, u, то $\Phi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Очевидно, что

$$\varepsilon \left| \int_0^t [F_i(\eta, \tau, v, f(\eta, \tau, v)) - F_i^0(\eta, v)] \, d\tau \right| \leqslant \varepsilon t \Phi(t) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau \Phi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \beta(\varepsilon) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$N_{2i} + N_{3i} + N_{4i} \leqslant 2p\beta(\varepsilon). \tag{11}$$

Следовательно, при соответствующем выборе чисел p и ε, из неравенств (10) и (11) можно получить оценку (9). Поэтому, подставляя (7)—(9) в (6), получаем

$$|u_i(x, t) - v_i(x, t)| \leqslant a + \varepsilon\nu \int_0^t \sum_{k=1}^{m} |u_k(x_i, \tau) - v_k(x_i, \tau)| \, d\tau +$$

$$+ \varepsilon\nu \int_0^t d\tau \int_0^\tau \mu_i(\tau, s) \sum_{k=1}^{m} |u_k(\theta_i, s) - v_k(\theta_i, s)| \, ds + b\delta_i(\varepsilon). \tag{12}$$

Зафиксируем t и введем обозначение $U(t) = \max\limits_{i; x; \tau \leqslant t} |u_i(x, \tau) - v_i(x, \tau)|$. Тогда на основании леммы Гроноулла — Беллмана из (12) получаем $U(t) \leqslant$ $\leqslant [a + b\delta(\varepsilon)] \, e^{\nu L m + \nu m \delta(\varepsilon)}$, где $\delta(\varepsilon) = \max\limits_i \delta_i(\varepsilon)$.

Если $u(x, t)$ на всем множестве $\Pi_g \bigcap \Pi_{\frac{L}{\varepsilon}}$ не покидает области G, то, полагая

$$a + b\delta(\varepsilon) < e^{-m\nu(1+L)} \min(\rho, \eta), \ \delta(\varepsilon) < 1,$$

получаем утверждение теоремы.

Аналогично работе [5], легко показать, что $u(x, t) \in G$ на всем множестве Π_g. Теорема доказана.

Замечание. В теореме предполагается, что предельный переход в (3) выполняется равномерно. Можно, однако, доказать теорему, сняв это требование, предполагая при этом, что предел (3) существует в каждой точке $x \in [0, l]$, $u \in G$ (см. [3], с. 105).

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К., «Наук. думка», 1971. 440 с.
2. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотическое решение уравнений в частных производных. К., «Вища школа», 1976. 590 с.
3. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент, «Фан», 1974. 214 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964. 830 с.
5. Хома Г. П. О методе усреднения для гиперболических систем стандартного вида.— В сб.: Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах. К., Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 194—207.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964. 272 с.

Тернопольский педагогический институт,
Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию
14.VI. 1977 г.