УДК 517.5

В. К. Дзядык

Об оценке погрешности полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

при условии, что функция $f(x, y)$ на некотором прямоугольнике $\Pi_{Ha} = [x_0, x_0 + H] \times [y_0 - a, \; y_0 + a]$ непрерывна по x и удовлетворяет по переменной y условию Липшица с константой A. Возьмем при каких-нибудь натуральных n и $h \in (0, H)$ произвольный многочлен $y_n(x)$ или же рациональный полином $y_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ степени n и попытаемся ответить на вопрос, на сколько этот многочлен отклоняется на сегменте $[x_0, x_0 + h]$ от неизвестного решения $y(x)$ этой задачи.

Чтобы решить эту задачу, например, в равномерной метрике, введем в рассмотрение невязку

$$\varepsilon_n(x) \overset{\text{df}}{=} y_n'(x) - f(x, y_n(x)).$$

Тогда, поскольку $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$ и

$$y_n(x) = y_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt + \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon_n(t)\, dt,$$

то

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant |y_0 - y_n(x_0)| + \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, y_n(t))|\, dt +$$

$$+ \left| \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon_n(t)\, dt \right| \leqslant |y_0 - y_n(x_0)| + A \int\limits_{x_0}^{x} |y(t) - y_n(t)|\, dt + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon_n(t)\, dt \right|.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла следует, что имеет место следующая оценка разности $y(x) - y_n(x)$:

$$\| y - y_n \|_{C[x_0, x_0+h]} \leqslant \left(| y_n(x_0) - y_0 | + \left\| \int\limits_{x_0}^{x} \varepsilon_n(t)\, dt \right\|_{C[x_0, x_0+h]} \right) e^{Ah} \leqslant$$

$$\leqslant e^{Ah} [| y_n(x_0) - y_0 | + h \| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_0+h]}]. \tag{2}$$

2. Аналогичные рассуждения применимы также при рассмотрении уравнений k-го порядка и систем дифференциальных уравнений. Однако для простоты рассмотрим только случай линейных уравнений k-го порядка с многочленными коэффициентами вида

$$a_0(x)\,y^{(k)} + a_1(x)\,y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\,y = f_0(x), \qquad (1')$$
$$y_j(0) = y_j,\ j = 0, 1, \ldots, k-1, \quad x \in [0, h],$$

в которых $a_j(x)$ и $f_0(x)$ — многочлены и $\min\limits_{x\in[0,h]} a_0(x) = c > 0$. В [1] установлено, что такое уравнение эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра вида

$$a_0(x)\,y(x) = \int\limits_0^x P_l(x, t)\,y(t)\,dt + f(x),\ f(x) \text{—многочлен},$$

в котором $P_l(x, t)$ — многочлен по переменным x и t, сумма показателей которого при x и t не превышает некоторого числа l. Легко проверить, что если, например, $y_n(x)$ — какой-нибудь многочлен степени n и степень многочлена $f(x)$ не превышает $n + l + 1$, то невязка $\varepsilon_n(x)$ уравнения

$$\varepsilon_n(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{a_0(x)} \int\limits_0^x P_l(x, t)\,y_n(t)\,dt + \frac{f(x)}{a_0(x)} - y_n(x)$$

представима в виде $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{a_0(x)} \pi_{n+l+1}(x)$, где $\pi_{n+l+1}(x)$ — многочлен степени $n + l + 1$ и что справедливо неравенство

$$|y(x) - y_n(x)| = \left| \int\limits_0^x \frac{P_l(x, t)}{a_0(x)} [y(t) - y_n(t)]\,dt + \varepsilon_n(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c} \int\limits_0^x \max_{x\in[0,h]} |P_l(x, t)|\,|y(t) - y_n(t)|\,dt + \frac{\|\pi_{n+l+1}(x)\|_{C[-h,h]}}{c},$$

вследствие чего получаем оценку

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{\|\pi_{n+l+1}(x)\|_{C[-h,h]}}{c}\,e^A, \qquad (3)$$
$$A = \frac{\int\limits_0^h \max\limits_{x\in[0,h]} |P_l(x, t)|\,dt}{c}.$$

3. Неравенства (2) и (3) сводят задачу об оценке величины $\|y - y_n\|_{C[x_0, x_0+h]}$ к задаче об оценке нормы интеграла известной функции $\varepsilon_n(x)$ (невязки) или же ее интеграла на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Этот результат, будучи в теоретическом отношении вполне законченным, при желании практически оценить величину $\|y - y_n\|_{C[x_0, x_0+h]}$ вызывает значительное затруднение в силу того, что норму от невязки $\|\varepsilon_n\|_{C[x_0, x_0+h]}$ (или от ее интеграла) в большинстве случаев эффективно оценить очень трудно

В связи с этим покажем, что в ряде случаев такую оценку можно произвести вполне эффективно и этим самым установим, что неравенства (2) и (3) зачастую дают возможность также практически оценить погрешность $\|y - y_n\|_{C[x_0, x_0+h]}$. При этом будем исходить из того, что функцию $\varepsilon_n(x)$ можно эффективно вычислить, и во всяком случае, оценить, в любой конечной системе точек $x_i \in [x_0, x_0 + h]$, $i = 1, 2, \ldots, N$: $x_0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N \leqslant x_0 + h$.

Установим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (ср. [3, 4]). *Если тригонометрический полином порядка n при каких-нибудь $t_0 \in (-\infty, \infty)$, $N > n$ и $\Delta \in [0, \xi]$, где $\xi \overset{\mathrm{df}}{=} \min\left\{\frac{\pi}{2N};\ \pi\frac{N-n}{2nN}\right\}$, удовлетворяет $2N$ неравенствам вида*

$$|T_n(\tilde{t}_k)| \leqslant M, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{4}$$

в которых $\tilde{t}_k = t_0 + \frac{k\pi}{N} + \delta_k$, где $|\delta_k| < \Delta$, то он будет удовлетворять также неравенству

$$\max_t |T_n(t)| = \|T_n\| \leqslant \frac{M}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \Delta\right)}. \tag{5}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что полином $T_n(t)$ удовлетворяет в точках $\tilde{t}_k$ строгим неравенствам

$$|T_n(\tilde{t}_k)| < M, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{4'}$$

Справедливость такого предположения следует из того, что если при произвольном $\varepsilon > 0$ из строгих неравенств $|T_n(\tilde{t}_k)| < M + \varepsilon$ вытекает неравенство $\|T_n\| \leqslant \frac{M+\varepsilon}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \Delta\right)}$, то в силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо также неравенство (5). Переходя к доказательству неравенства (5), предположим от противного, что неравенство (4′) выполняется и что в то же время в некоторой точке t^* имеет место неравенство

$$|T_n(t^*)| > \frac{M}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \Delta\right)}. \tag{6}$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$t_0 = -\frac{\pi}{2N}, \quad |T_n(t^*)| = T_n(t^*), \quad t^* \in (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1). \tag{7}$$

Положим

$$\alpha(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{M}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \Delta\right)} \cos nt, \qquad \varphi(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha(t) - T_n(t) \tag{8}$$

и при каждом $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1$ обозначим через $\tilde{\xi}_\nu$ какую-нибудь из точек множества $\{\tilde{t}_k\}_{k=1}^{2N-1}$, которая попадает в полуинтервал

$$I_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\frac{\nu\pi}{n} - \frac{\pi}{2N} - \Delta,\ \frac{\nu\pi}{n} + \frac{\pi}{2N} + \Delta\right]. \tag{9}$$

Учитывая, что

1) $\tilde{t}_0 < t^* < \tilde{t}_1 < \tilde{\xi}_1 < \tilde{\xi}_2 < \ldots < \tilde{\xi}_{2n-1} < \tilde{t}_0 + 2\pi;$ (10)

2) при всех $t \in I_\nu$ имеет место неравенство

$$(-1)^\nu \alpha(t) > M \Rightarrow (-1)^\nu \alpha(\tilde{\xi}_\nu) > M, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n-1; \tag{11}$$

3) $|T_n(\tilde{\xi}_\nu)| < M;$

4) $\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 \in I_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \left(-\frac{\pi}{2N} - \Delta, \ \frac{\pi}{2N} + \Delta\right)$ при $\forall t \in I_0$: $\alpha(t) > M$,

видим, что для $\varphi(t)$ имеют место следующие неравенства:

$$(-1)^{\nu} \varphi(\tilde{\xi}_{\nu}) = (-1)^{\nu} [\alpha(\tilde{\xi}_{\nu}) - T_n(\tilde{\xi}_{\nu})] > (-1)^{\nu} \alpha(\tilde{\xi}_{\nu}) - M > 0$$

и, значит, благодаря (4′) и (6)—также неравенства

$$\varphi(\tilde{t}_0) > 0, \ \varphi(t^*) < 0, \ \varphi(\tilde{t}_1) > 0, \ \varphi(\tilde{\xi}_1) < 0, \ \varphi(\tilde{\xi}_2) > 0, \ldots, \varphi(\tilde{\xi}_{2n-1}) < 0,$$

$$\varphi(\tilde{t}_0 + 2\pi) > 0$$

Отсюда, благодаря (8), следует, что тригонометрический полином $\varphi(t)$ порядка n имеет на периоде $[\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + 2\pi]$ по крайней мере $2n + 2$ корня, что невозможно. Этим теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Неравенство (5) неулучшаемое в том смысле, что если N кратно n: $N = \nu_0 n$ (ν_0—натуральное число) и $\delta_{j\nu_0} = -\Delta$, $\delta_{j\nu_0+1} = +\Delta$, так что

$$\tilde{t}_{j\nu_0} = \frac{j\pi}{n} - \frac{\pi}{2N} - \Delta, \quad \tilde{t}_{j\nu_0+1} = \frac{j\pi}{n} + \frac{\pi}{2N} + \Delta,$$

то неравенство (5) превращается в равенство, как только $T_n(\tilde{t}_{j\nu_0}) = T_n(\tilde{t}_{j\nu_0+1}) = (-1)^j M$.

2. Когда $\Delta = 0$, неравенство (5) установлено ранее другим способом в [2].

Из этой теоремы в качестве следствия вытекает следующая теорема.

Теорема 1′. *Если алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n при некоторых $N > n$ и $\Delta \in [0, \xi)$, где $\xi \overset{\mathrm{df}}{=} \min\left\{\frac{\pi}{2N}, \ \pi\frac{N-n}{2nN}\right\}$ в N точках сегмента $[x_0, x_0 + h]$ вида*

$$\tilde{x}_k = x_0 + \frac{h}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N} + \delta_k\right)\right], \tag{12}$$

где $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $N > n$, или же (при более жестком условии)

$$\tilde{x}_k = x_0 + \frac{h}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{k\pi}{N}\right) + \Delta x_k\right],$$

$$|\Delta x_k| \leqslant \tilde{\Delta}, \ \tilde{\Delta} \overset{\mathrm{df}}{=} \min\left\{\Delta, \ \frac{\pi}{4N^2}\right\} \tag{12′}$$

удовлетворяет неравенству $|P_n(\tilde{x}_k)| \leqslant M$, то он будет удовлетворять также неравенству

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h} |P_n(x)| \leqslant \frac{M}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \Delta\right)} \tag{13}$$

или соответственно неравенству

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h} |P_n(x)| \leqslant \frac{M}{\cos n\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{4N}{\pi}\tilde{\Delta}\right)}. \tag{13′}$$

Отсюда в случае, когда, например, $N = 4n$, получим

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h} |P_n(x)| < \sqrt{2}\, M. \tag{14}$$

Однако, если $\tilde{\Delta}$ достаточно мало, то уже при $N = 2n$ для левой части (14) также получим оценку, близкую к $\sqrt{2M}$.

4. В качестве примеров рассмотрим следующие случаи.

1. Важный класс дифференциальных уравнений, на которых можно эффективно оценить норму функции $\varepsilon_n(x) = y_n'(x) - f(x, y_n(x))$, образуют уравнения, правая часть $f(x, y)$ которых представляет собой многочлен по переменным x, y вида

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\, y^j, \tag{15}$$

где $a_j(x)$ — многочлены по x степени l.

В частности в этот класс входят уравнения Риккати с многочленными коэффициентами, т. е. уравнения вида $y' = a_2(x)\, y^2 + a_1(x)\, y + a_0(x)$, где $a_j(x)$, $i = \overline{0, 2}$ — многочлены. Действительно, в этом случае невязка

$$\varepsilon_n(x) = y_n'(x) - \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\, y_n^j(x) \tag{16}$$

— многочлен степени не выше $mn + l$.

Поэтому, применяя теорему 1, например, при $N = 4(mn + l)$, получаем

$$\| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_0+h]} \leqslant \sqrt{2} \max_{0 \leqslant i \leqslant 4(mn+l)-1} | \varepsilon_n(\tilde{x}_i) |, \tag{17}$$

где точки $\tilde{x}_i$ определяются равенствами (12). Отсюда на основании неравенства (2) получаем, например, следующее утверждение.

Утверждение. *Если правая часть $f(x, y)$ уравнения* (1) — *многочлен вида* (15), *функция $\varepsilon_n(x)$ определяется по формуле* (16) *и точки $\tilde{x}_i$, $0 \leqslant i \leqslant N - 1$, определяются равенствами* (12) *при $N = 4(mn + l)$, то имеет место неравенство*

$$\| y - y_n \|_{C[x_0, x_0+h]} \leqslant e^{Ah} \left(| y_n(x_0) - y_0 | + \sqrt{2} h \max_{0 \leqslant i \leqslant 4(mn+l)-1} | \varepsilon_n(\tilde{x}_i) | \right). \tag{18}$$

2. В случае, когда на $[x_0, x_0 + h]$ при каком-нибудь натуральном k удается оценить производные от невязок до порядка k в некоторой системе точек $\{\tilde{x}_i\}$ и норму $(k + 1)$-й производной от функции $f(x, y_n(x))$, имеет место следующая оценка:

$$\| \varepsilon_n \| \leqslant \max_i \left\{ | \varepsilon_n(x_i) | + \frac{\widetilde{\Delta x}_i}{2} | \varepsilon_n'(\tilde{x}_i) | + \ldots + \left(\frac{\widetilde{\Delta x}_i}{2} \right)^k \frac{| \varepsilon_n^{(k)}(\tilde{x}_i) |}{k!} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\widetilde{\Delta x}_i}{2} \right)^{k+1} \frac{\| y_n^{(k+1)} \| + \left\| \frac{d^{k+1} f(t, y_n(t))}{dt^{k+1}} \right\|}{(k+1)!} \right\}, \tag{19}$$

где $\widetilde{\Delta x}_i \overset{\text{df}}{=} \max \{ | \tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i |;\ | \tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1} | \}$.

Действительно, эта оценка следует из разложения $\varepsilon_n(x)$ по формуле Тейлора

$$\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n(\tilde{x}_i) + \varepsilon_n'(\tilde{x}_i)(x - \tilde{x}_i) + \ldots + \frac{\varepsilon_n^{(k)}(\tilde{x}_i)}{k!}(x - \tilde{x}_i)^k +$$
$$+ \frac{1}{(k+1)!} \int_{\tilde{x}_i}^{x} (t - \tilde{x}_i)^k \left[y_n^{(k+1)}(t) - \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} f(t, y_{n+1}(t)) \right] dt.$$

Отметим, что норма многочлена $y_n^{(k+1)}$ в (19) может быть оценена при помощи теоремы 1′.

3. Если функция $f(x, y)$, обладая малой гладкостью, почти всюду имеет обе частные производные, и при этом $|f'_x(x, y)| \leqslant A_1$, $|f'_y(x, y)| \leqslant A_2$, можно поступить, например, следующим образом.

Положим $x_i = x_0 + \frac{i}{N} h$, $i = \overline{0, N}$. Для любого $x \in [x_0, x_0 + h]$ существует точка x_i такая, для которой $|x_i - x| \leqslant \frac{h}{2N}$. Поэтому, принимая во внимание, что $\varepsilon_n(x) \stackrel{\text{df}}{=} y'_n(x) - f(x, y_n(x))$, получаем

$$|\varepsilon_n(x)| \leqslant |\varepsilon_n(x_i)| + |\varepsilon_n(x) - \varepsilon_n(x_i)| \leqslant |\varepsilon_n(x_i)| + |y'_n(x) - y'_n(x_i)| +$$
$$+ |f(x, y_n(x)) - f(x_i, y_n(x_i))| \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |\varepsilon_n(x_i)| + \frac{h}{2N} \| y''_n \|_{C[x_0, x_0+h]} +$$
$$+ A_2 \frac{h}{2N} \| y'_n \|_{C[x_0, x_0+h]} + A_1 \frac{h}{2N} \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{\varepsilon}_n(N). \tag{20}$$

Заметим, что в полученном неравенстве все слагаемые легко оцениваются, ибо величины $\| y_n^{(i)} \|$ можно оценить с помощью теоремы 1′. Поэтому остается только разумно выбрать числа h и N.

В заключение приведем еще следующие общие замечания.

I. Норму многочлена $y_n(x)$ на $[0, h]$ зачастую (но не всегда) достаточно хорошо можно оценить путем его представления в виде

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j T_j\left(\frac{2x - h}{h}\right), \quad T_j(x) \stackrel{\text{df}}{=} \cos j \arccos x$$

и последующей оценки $\| y_n(x) \|_{C[0,h]} \leqslant \sum_{j=0}^{n} |c_j|$.

II. Если невязка $\varepsilon_n(x) = y'_n(x) - f(x, y_n(x))$ на $[x_0, x_0 + h]$ — рациональный полином вида $\varepsilon_n(x) = \frac{\mathbf{P}_{N_1}(x)}{Q_{N_2}(x)}$, где $\mathbf{P}_{N_1}(x)$ и $Q_{N_2}(x)$ — многочлены соответственно степеней N_1 и N_2, то $\| \varepsilon_n(x) \| \leqslant \frac{\| \mathbf{P}_{N_1}(x) \|}{\min\limits_x |Q_{N_2}(x)|}$.

В этом случае при помощи рассмотренного ранее способа следует оценить на $[x_0, x_0 + h]$ величины $\| \mathbf{P}_{N_1}(x) \|$ и $\| Q'_{N_2}(x) \|$ и после этого, найдя на какой-нибудь системе точек $\{x_i\}_1^N \subset [x_0, x_0 + h]$ величины $|Q_{N_2}(x_i)|$, зная величину $\| Q'_{N_2}(x) \|$, можно также оценить снизу величину $\min\limits_{x \in [x_0, x_0+h]} Q_{N_2}(x)$.

III. Поскольку каждый сплайн представляет собой между узлами некоторый многочлен, изложенный выше способ применим для эффективной оценки погрешности также в случае сплайн-приближения. При этом, если $y_n : [x_0, x_0 + h] \to R$ — сплайн, $\varepsilon_n(x)$ — невязка и x_i узлы сплайна: $x_0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k = x_0 + h$, то, согласно (2), на сегменте $[x_0, x_1]$ получим

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant e^{A(x_1 - x_0)} [|y_n(x_0) - y_0| + (x_1 - x_0) \| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_1]}],$$

на сегменте $[x_1, x_2]$ —

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant e^{A(x_2 - x_1)} [|y_n(x_1) - y(x_1)| + (x_2 - x_1) \| \varepsilon_n \|_{C[x_1, x_2]}] \leqslant$$
$$\leqslant e^{A(x_2 - x_1)} \{e^{A(x_1 - x_0)} [|y_n(x_0) - y_0| + (x_1 - x_0) \| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_1]}] +$$
$$+ (x_2 - x_1) \| \varepsilon_n \|_{C[x_1, x_2]}\} \leqslant e^{A(x_2 - x_0)} [|y_n(x_0) - y_0| + (x_2 - x_1) \| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_2]}]$$

и т. д., так что на всем сегменте $[x_0, x_0 + h]$

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant e^{Ah} [|y_n(x_0) - y_0| + h \| \varepsilon_n \|_{C[x_0, x_0+h]}]. \qquad (2')$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, **38**, № 4, с. 937—967.
2. Бернштейн С. Н. Об ограничении значений многочлена $P_n(x)$ на всем отрезке по его значениям в $n + 1$ точках.— Сочинения.— М.: Изд-во АН СССР, 1954, **2**, с. 107—126.
3. Дзядык В. К. Про оцінки похибок при застосуванні методу сіток в теорії чебишовського наближення функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 6, с. 500—504.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 512 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10.I. 1978 г.