УДК 519.3:62-50

М. М. Копец

О модальной управляемости в банаховом пространстве

В банаховом пространстве E рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)b,$$

где A — линейный ограниченный оператор в E, b — заданный ненулевой элемент из E, $x(t) \in E$ при всех $t \geqslant 0$, $u(t)$ — скалярная ограниченная измеримая функция.

Если f — некоторый ненулевой элемент из сопряженного к E пространства E^*, то можно определить линейный ограниченный оператор F, действующий в E, следующим образом: $Fx = f(x)b$ для каждого $x \in E$ (см. [1], с. 62). То обстоятельство, что оператор F определен с помощью элементов $b \in E$ и $f \in E^*$, символически записывается так: $F = f \otimes b$. В случае, когда функция $u(t)$ имеет вид $u(t) = f(x(t))$, уравнение (1) можно записать следующим образом: $\dot{x}(t) = (A + F)x(t)$.

Предположим, что задана ограниченная последовательность $\{\lambda_i\}_1^\infty$ комплексных чисел, причем $|\lambda_{i+1}| \leqslant |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} |\lambda_i| = 0$. Такую последовательность будем называть последовательностью типа М. Систему (1) назовем модально управляемой, если для любой заданной последовательности типа М существует элемент $f \in E^*$ такой, что точечный спектр оператора $A + F$ совпадает с этой последовательностью.

Система $\{e_i\}_1^\infty$ элементов из банахова пространства E образует базис в E, если каждый элемент $x \in E$ можно однозначно представить в виде сходящегося ряда $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ (см. [1], с. 66).

Обозначим $A^0 = I$, где I — тождественное преобразование в E. Пусть последовательность $\{A^{i-1}b\}_1^\infty$ элементов из E образует базис в E. Тогда существует линейный ограниченный оператор T, взаимно однозначно отображающий банахово пространство E_1 всевозможных числовых последовательностей $\{c_i\}_1^\infty$, для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i A^{i-1} b$ сходится, на E. В этом случае существует оператор T^{-1}, также являющийся линейным ограниченным оператором, и взаимно однозначно отображает E на E_1 (см. [2], с. 169).

Предположим, что в пространстве E_1 система ортов $e_i=\{\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}, 1, 0, \ldots\}$ образует базис. Например, в пространствах c_0 и l_p $(p \geqslant 1)$ эта система образует базис, в пространстве c она не образует базиса (см. [1], с. 67).

Введем замену переменной по формуле $x=Ty$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$\dot{y}(t)=T^{-1}ATy(t)+u(t)T^{-1}b.$$

Поскольку $T^{-1}T=I_1$, где I_1 — оператор тождественного преобразования в E_1 и определяется единичной матрицей бесконечной размерности, то имеют место соотношения

$$T^{-1}ATy=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad T^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Функцию $u(t)$ представим в виде $u(t)=\sum_{i=1}^{\infty} k_i y_i(t)$ или $u(t)=k(y(t))$, где $y(t)\in E_1$ при всех $t\geqslant 0$, $k\in E_1^*$. С другой стороны, $u(t)=f(x(t))=f(Ty(t))=T^*f(y(t))$. Поэтому $k=T^*f$. Рассмотрим оператор $L=T^{-1}AT+k\otimes T^{-1}b$. Это линейный ограниченный оператор в пространстве E_1. Предположим, что λ — собственное число оператора $A+f\otimes b$, x — соответствующий этому числу собственный элемент оператора $A+f\otimes b$, т. е. выполняется соотношение $Ax+f(x)b-\lambda x=\Theta$, причем $x\neq\Theta$. Пусть $y=T^{-1}x$. Тогда $ATy+f(Ty)b-\lambda Ty=\Theta$ или $T^{-1}ATy+k(y)T^{-1}b-\lambda y=\Theta$, т. е. число λ и элемент y являются соответственно собственным числом и собственным элементом оператора L. Аналогично убеждаемся в том, что если число λ и элемент y — соответственно собственное число и собственный элемент оператора L, то число λ и элемент $x=Ty$ — соответственно собственное число и собственный элемент оператора $A+f\otimes b$. Таким образом, решение задачи об определении элемента $f\in E^*$ такого, для которого точечный спектр оператора $A+f\otimes b$ совпадает с заданной последовательностью $\{\lambda_i\}_1^\infty$ типа M, существует тогда и только тогда, когда существует решение задачи об определении элемента $k\in E_1^*$, для которого точечный спектр оператора L совпадает с заданной последовательностью $\{\lambda_i\}_1^\infty$ типа M.

Легко показать, что оператору L соответствует следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

где числа k_i, $i=1, 2, \ldots$, — координаты элемента $k\in E_1^*$. Рассмотрим оператор I_1-zL, где z — некоторое комплексное число. Ему соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 1-zk_1 & -zk_2 & -zk_3 & -zk_4 & \ldots \\ -z & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -z & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -z & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Обозначая через $(I_1 - zL)_n$ оператор, определенный квадратной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 - zk_1 & -zk_2 & -zk_3 & \dots & -zk_{n-1} & -zk_n \\ -z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & 1 \end{pmatrix},$$

с помощью метода математической индукции приходим к выводу, что определитель оператора $(I_1 - zL)_n$ можно записать следующим образом: $\det (I_1 - zL)_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} k_i z^i$. Формально для оператора $I_1 - zL$ положим: $\det (I_1 - zL) = \lim_{n\to\infty} \det (I_1 - zL)_n = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} k_i z^i$. Пусть число $z_0 \neq 0$ — корень уравнения $\det (I_1 - zL) = 0$. Легко показать, что тогда число z_0^{-1} — собственное число оператора L. Верно и обратное утверждение: если число $\lambda_0 \neq 0$ — собственное число оператора L, то число λ_0^{-1} — корень уравнения $\det (I_1 - zL) = 0$. Таким образом, решение сформулированной выше задачи существует тогда и только тогда, когда существует целая функция $\varphi(z)$ такая, для которой заданная последовательность $\{\lambda_i^{-1}\}_1^\infty$ совпадает с множеством ее нулей Поскольку последовательность $\{\lambda_i\}_1^\infty$ — последовательность типа М, то последовательность $\{\lambda_i^{-1}\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса (см. [3], с. 272). Следовательно, такая целая функция $\varphi(z)$ существует. Пусть она имеет вид $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$. Очевидно, $a_0 \neq 0$, так как в противном случае число $z = 0$ — нуль функции $\varphi(z)$, что невозможно в силу ограниченности последовательности $\{\lambda_i\}_1^\infty$. Поэтому имеем $k_i = -a_i/a_0$, $i = 1, 2, \dots$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема. *Пусть система $\{A^{i-1}b\}_1^\infty$ элементов из банахова пространства E образует базис в E, E_1—банахово пространство всевозможных числовых последовательностей $\{c_i\}_1^\infty$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i A^{i-1} b$ сходится. Если последовательность единичных ортов $e_i = \{\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, 1, 0, \dots\}$, $i = 1, 2, \dots$, образует базис в пространстве E_1, то система* (1) *модально управляема.*

Рассмотрим пример. Пусть в пространстве l_2 числовых последовательностей оператор A и элемент b заданы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что в этом случае последовательность $\{A^{i-1}b\}_1^\infty$ образует базис в l_2. Если последовательность $\{\lambda_i\}_1^\infty$ задать в виде $\{(\pi i)^{-2}\}_1^\infty$, то такая последовательность — последовательность типа М. С другой стороны, имеет место следующее разложение: $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(\pi i)^2}\right)$. Поскольку оператор T в данном случае — оператор тождественного преобразования в l_2 и имеет место разложение $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$, то на основании доказанной выше теоремы приходим к выводу, что последовательность $\{(\pi i)^{-2}\}_1^\infty$ совпадает с точечным спектром оператора, определенного следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3!} & -\frac{1}{5!} & \frac{1}{7!} & -\frac{1}{9!} & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ & \ldots & & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Представляет интерес связь полученных результатов с условиями управляемости. Для конечномерных систем модальная управляемость равносильна полной управляемости (см. [4], с. 317). Необходимые и достаточные условия управляемости для линейных систем в банаховом пространстве приведены в [5], с. 306, однако в эти условия входит требование конечномерности пространства E, а в этом случае эти два понятия равносильны. Рассматривая нуль-управляемость системы (1), легко установить, что для нуль-управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система элементов b, Ab, ..., $A^n b$, ... была полной в пространстве E (понятие нуль-управляемости и соответствующие критерии нуль-управляемости приведены, например, в [6]). В данной работе предполагается, что эта система образует базис в E. Поскольку требования полноты и базиса, вообще говоря, не равносильны, то и свойства нуль-управляемости и модальной управляемости для системы (1) не равносильны.

В заключение отметим, что большой библиографический материал по вопросу модальной управляемости для линейных систем как со сосредоточенными, так и с распределенными параметрами содержится в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Функциональный анализ.— 2-е изд./под ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
2. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.— 519 с.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М.: Наука, 1968.— Т. 2. 624 с.
4. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами.— М.: Наука, 1976.— 424 с.
5. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1975.— 367 с.
6. Fattorini H. O. On complete controllability of linear systems.— J. Diff. Equat., 1967, 3, p. 391—402.

Киевский техникум
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
26.IX. 1977 г.