УДК 517.917

И. О. Парасюк

О параметрическом резонансе в линейных гамильтоновых системах с квазипериодическими коэффициентами

В данной работе изучаются метрические характеристики резонанса в линейных гамильтоновых системах с матрицами, зависящими от нескольких параметров. Предполагается, что параметрическое возмущение квазипериодично во времени, а невозмущенная система имеет постоянные коэффициенты и устойчива.

Точку в пространстве параметров будем называть нерезонансной, если фундаментальная матрица системы при значениях параметров, соответствующих этой точке, имеет вид $V(t)e^{iA_0t}$, где $V(t)$ — квазипериодическая матрица с базисом частот возмущения, A_0 — вещественная диагональная матрица (ср. с [1]).

Ниже будут установлены оценки для лебеговой меры резонансных точек из единичного куба в пространстве параметров. Эти оценки будут зависеть не только от величины возмущения, но и от того, в какой части пространства параметров расположен единичный куб. Они позволяют судить о вероятности возникновения резонанса в системе при наугад выбранных значениях параметров. Привлечение понятия меры в данном случае представляется вполне оправданным в связи с тем, что, как показано в [1—3], резонансные точки, вообще говоря, лежат всюду плотно в пространстве параметров. Идейная сторона работы и метод доказательства близки к [4—7].

Отметим, что вопрос о непустоте нерезонансного множества для классов рассматриваемых ниже систем до настоящего времени, по-видимому, был открыт, на что косвенно указывалось в [3, с. 111].

1. Рассмотрим систему

$$J\frac{dz}{dt}=(A+\varepsilon B(\omega t))\,z. \tag{1}$$

Здесь z — $2s$-мерный вектор, $J=\begin{pmatrix}0 & -E_s\\ E_s & 0\end{pmatrix}$, E_s — s-мерная единичная матрица, A — симметричная $(A^T=A)$, $B(\varphi)$ — симметричная матрица, периодическая по $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ с периодом 2π. Будем предполагать, что $B(\varphi)$ принадлежит пространству C^l l раз непрерывно дифференцируемых матриц-функций. Параметрами системы (1) являются частоты возмущения $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)\in R^m$ и $\varepsilon>0$. Введем следующее условие.

а). Существует симплектическая матрица $C\,(C^TJC=J)$ такая, для которой $C^TAC=\Lambda$, где $\Lambda=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_s,a_1,\ldots,a_s)$. Как известно, условие а) необходимо для сильной устойчивости системы $J\dot z=Az$ при $m=1$ (см. [8]).

Назовем показателем нерезонансности куба $K(\omega^0)=\{\omega:\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\omega_i-\omega_i^0|\leqslant 2^{-1}\}$ для системы (1) наибольшее число $q_A(\omega^0,\varepsilon)$, обладающее свойством: при любом целочисленном векторе $n=(n_1,\ldots,n_m)\neq 0$ с нормой $\|n\|=\sum\limits_{i=1}^{m}|n_i|<q_A(\omega^0,\varepsilon)$ расстояние от гиперплоскости $(n,\omega)+a_i\pm a_j=0$ $(i,j=\overline{1,s})$ до куба $K(\omega^0)$ больше $\sqrt[4]{\varepsilon}$ $((n,\omega)=n_1\omega_1+\ldots+n_m\omega_m)$.

Теорема 1. *Предположим, что в системе* (1) *матрица* A *удовлетворяет условию* а) *и* $a_i\neq 0$, $a_i\pm a_j\neq 0\,(i\neq j,\ i,j=\overline{1,s})$. *Пусть* $B(\varphi)\in C^l$, $l>2m$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0,1]$ *существуют положительные числа* ε_0, C_1, *не зависящие от* ω^0, *такие, для которых при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *мера* $\sigma_A(\omega^0,\varepsilon)$ *резонансных точек в кубе* $K(\omega^0)$ *удовлетворяет оценке*

$$\sigma_A(\omega^0,\varepsilon)\leqslant C_1\sqrt{\varepsilon}\,(q_A(\omega^0,\varepsilon))^{-\frac{l+1}{2}+m+\alpha},$$

где $q_A(\omega^0,\varepsilon)$ — *показатель нерезонансности куба* $K(\omega^0)$ *для системы* (1).

Аналогичный результат имеет место для системы

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(P+\varepsilon U(\omega t))\,x=0,$$

где x — s-мерный вектор, P — положительно определенная симметричная матрица с различными собственными значениями, $U^T(\varphi)=U(\varphi)$, $U(\varphi)\in C^l$.

Другие характеристики параметрического резонанса в системах вида (1) были изучены в [1].

2. Рассмотрим систему

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(\theta^2+\varepsilon U(\omega t))x=0, \tag{2}$$

где x — s-мерный вектор, $\theta=\operatorname{diag}(\theta_1,\ldots,\theta_s)$, $U^T(\varphi)=U(\varphi)$. Будем считать θ, ω, ε параметрами, причем $\omega\in R^m$, а область изменения θ — часть конуса $F_{a,b}=\{\theta: a^{-1}\leqslant\theta_i\theta_j^{-1}\leqslant a,\ a>1,\ \theta_i\geqslant b>0\}$. (Очевидно, что при $a\to\infty$, $b\to 0$ область $F_{a,b}$ переходит в область $\theta_i>0$, $i=\overline{1,s}$.)

Обозначим через $q_0(\omega^0,\varepsilon)$ то наибольшее число, для которого расстояние от гиперплоскости $(n,\omega)=0$ до куба $K(\omega^0)$ больше $\sqrt[4]{\varepsilon}\,\|n\|^{-\frac{l-1}{2}}$ при всех $n\neq 0$ с нормой $\|n\|<q_0(\omega^0,\varepsilon)$.

Теорема 2. *Пусть в системе* (2) $U(\varphi)\in C^l$, $l>2m$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0,1]$ *найдутся положительные числа* C_2, C_3, ε_0 *такие, для которых, если куб* $K(\theta^0,\omega^0)=\{\theta,\omega: \max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}|\theta_i-\theta_i^0|\leqslant 2^{-1},\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|\omega_i-\omega_i^0|\leqslant 2^{-1}\}$ *лежит в* $F_{a,b}\times R^m$ *вместе со своей* $C_2\sqrt{\varepsilon}$*-окрестностью, то мера* $\sigma(\theta^0,\omega^0,\varepsilon)$ *резонансных точек в нем удовлетворяет оценке*

$$\sigma(\theta^0,\omega^0,\varepsilon)\leqslant C_3\sqrt{\varepsilon}\left(h(\theta^0,\omega^0)+(q_0(\omega^0,\varepsilon))^{-\frac{l+1}{2}+m+\alpha}\right),$$

где

$$h(\theta^0,\omega^0)=\sum_{i\neq j}\left(\frac{|\theta_i^0-\theta_j^0|}{|\omega^0|+1}+1\right)^{-\frac{l}{2}+m+\alpha}+\sum_{i,j}\left(\frac{|\theta_i^0+\theta_j^0|}{|\omega^0|+1}+1\right)^{-\frac{l}{2}+m+\alpha}.$$

Числа C_2, C_3, ε_0 *не зависят от* θ^0, ω^0.

Назовем показателем нерезонансности куба $K(\theta^0,\omega^0)$ для системы (2) то наибольшее число $q(\theta^0,\omega^0,\varepsilon)$, для которого расстояние от гиперплоскости $(n,\omega)+\theta_i\pm\theta_j=0$ $(i,j=\overline{1,s})$ до куба $K(\theta^0,\omega^0)$ больше $\sqrt[4]{\varepsilon}$ при любом $n\neq 0$ с нормой $\|n\|<q(\theta^0,\omega^0,\varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и* $\min\limits_{i\neq j}|\theta_i^0-\theta_j^0|>1$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0,1]$ *найдутся положительные числа* C_4 *и* ε_0 *такие для которых, если* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, *то* $\sigma(\theta^0,\omega^0,\varepsilon)\leqslant C_4\sqrt{\varepsilon}(q(\theta^0,\omega^0,\varepsilon))^{-\frac{l+1}{2}+m+\alpha}$.

3. Пусть в системе (2) вектор частот ω фиксирован, а θ — параметр.

Теорема 4. *Пусть* $U(\varphi)\in C^l$, $l>2m$, *и* ω *сильно несоизмерим, т. е. существует число* $\gamma>0$ *такое, для которого* $|(n,\omega)|\geqslant\gamma(\max|n_i|)^{-m}$. *Тогда для любого* $\alpha\in(0,1]$ *найдутся числа* C_5, C_6, ε_0 *такие, для которых, если куб* $K(\theta^0)=\{\theta: \max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}|\theta_i-\theta_i^0|\leqslant 2^{-1}\}$ *содержится в* $F_{a,b}$ *вместе со своей* $C_5\sqrt{\varepsilon}$*-окрестностью, то мера* $\sigma(\theta^0,\varepsilon)$ *резонансных точек в нем удовлетворяет оценке* $\sigma(\theta^0,\varepsilon)\leqslant C_6\sqrt{\varepsilon}\,h(\theta^0,\omega)$, *где* $h(\theta^0,\omega)$ *определено в теореме* 2.

4. Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+u(\omega x)\psi=\lambda^2\psi,\ \lambda\in R^1,\ x\in R^1.$$

Уточним результат работы [7].

Теорема 5. *Пусть* $u(\varphi)\in C^l$, $l>m+1$ *и* ω *сильно несоизмерим. Тогда на оси* $0<\lambda<\infty$ *длина интервала с центром в точке* λ, *целиком состоящего из резонансных точек, меньше* $C_7\lambda^{-l+1+\alpha}$, *где* $\alpha>0$, C_7 — *положительная постоянная, зависящая от* α.

Отметим, что лакуны в спектре оператора Шредингера целиком содержатся в резонансных интервалах, но, вообще говоря, не совпадают с ними.

5. Если в теореме 1 потребовать, чтобы элементы матрицы $B(\varphi)$ были тригонометрическими полиномами или аналитическими функциями при

$|\operatorname{Im}\varphi_i|<\rho$, $\rho>0$, $i=\overline{1,m}$, то можно получить оценку $\sigma(\omega^0, \varepsilon)\leqslant \leqslant C_7\sqrt{\varepsilon}\exp\left\{-c_8\,\frac{q_A(\omega^0, \varepsilon)}{\ln^\beta q_A(\omega^0, \varepsilon)}\right\}$, где $\beta>1$, а C_7, c_8—положительные постоянные, зависящие от β. Аналогичные оценки получаются в теоремах 2—5.

Автор глубоко признателен А. М. Самойленко и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В. Н. О динамической неустойчивости линейных систем с почти периодическими коэффициентами.— ДАН СССР, 1968, **178**, № 1, с. 43—46.
2. Красинский Г. А. Параметрический резонанс в канонических системах линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— ДАН СССР, 1968, **180**, № 3, с. 526—529.
3. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. — Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1972.— 240 с.
4. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— Успехи мат. наук, 1963, **18**, вып. 5, с. 13—40.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.— 248 с.
6. Динабург Е. И., Синай Я. Г. Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом.— Функц. анализ и его приложения, 1975, **9**, вып. 4, с. 8—21.
7. Парасюк И. О. О зонах неустойчивости уравнения Шредингера с гладким квазипериодическим потенциалом.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 1, с. 70—78.
8. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 720 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.V. 1978 г.