УДК 517.5

А. И. Степанец

Решение одной экстремальной задачи для классов непрерывных функций двух переменных в перестановках

Пусть на произвольном отрезке $[a, b]$ заданы точка c, $a < c < b$, и суммируемая функция $\psi(x)$, обладающая тем свойством, что почти всюду на (a, c) $\psi(x) > 0$ $(\psi(x) < 0)$ и почти всюду на (c, b) $\psi(x) < 0$ $(\psi(x) > 0)$ и, кроме того, $\int\limits_a^b \psi(t)\,dt = 0$. В таком случае будем говорить, что $\psi(t)$ принадлежит множеству $V_{a,b}^c$ и писать $\psi \in V_{a,b}^c$.

Если $\psi \in V_{a,b}^c$, $\varphi \in V_{a_1,b_1}^{c_1}$ и $H_{\omega_1,\omega_2}(P)$ — класс функций $f(x, y)$ таких, для которых

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \omega_1(|x - x'|) + \omega_2(|y - y'|),\ (x, y),\ (x', y') \in P = \\ = [a \leqslant x \leqslant b;\quad a_1 \leqslant y \leqslant b_1],$$

$\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — произвольные модули непрерывности, то, как показано в [1, 2],

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\psi,\varphi}^{\omega_1,\omega_2}(P) \overset{\text{df}}{=} \sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}(P)} \left| \int\limits_a^b \int\limits_{a_1}^{b_1} \psi(x)\varphi(y) f(x, y)\,dy dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left| \int\limits_a^c \int\limits_{a_1}^{c_1} \psi(x)\varphi(y) \min\{\omega_1(\rho(x) - x);\ \omega_2(\delta(y) - y)\}\,dy dx \right|, \qquad (1)$$

где $\rho(x)$ и $\delta(y)$ — функции, определяющиеся соотношениями

$$\int\limits_a^x \psi(t)\,dt = \int\limits_a^{\rho(x)} \psi(t)\,dt,\ a \leqslant x \leqslant c \leqslant \rho(x) \leqslant b;\ \int\limits_{a_1}^{y} \varphi(z)\,dz = \int\limits_{a_1}^{\delta(y)} \varphi(z)\,dz,$$
$$a_1 \leqslant y \leqslant c_1 \leqslant \delta(y) \leqslant b_1, \tag{2}$$

и в случае, когда модули $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — выпуклые, построена экстремальная функция $f^*(x, y)$, на которой эта верхняя грань реализуется.

Цель данной работы — получить другую форму правой части выражения (1), свободную от функций $\rho(x)$ и $\delta(y)$ в предположении, что модули непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ являются выпуклыми.

1. Пусть сначала $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — выпуклые и строго монотонные соответственно на отрезках $[0, b-a]$ и $[0, b_1-a_1)$, и, кроме того, пусть выполняется условие

$$\omega_1(b-a) = \omega_2(b_1-a_1). \tag{3}$$

В этой ситуации множество L_1 точек (x, y), лежащих в прямоугольнике $p = [a \leqslant x \leqslant c,\ a_1 \leqslant y \leqslant c_1]$ и удовлетворяющих соотношению

$$\omega_1(\rho(x)-x) = \omega_2(\delta(y)-y), \tag{4}$$

будет совпадать (см. [2]) с графиком некоторой строго возрастающей абсолютно непрерывной на $[a, c]$ функции $y = l_1(x)$, $l_1(a) = a_1$; $l_1(c) = c_1$, обладающей строго возрастающей и абсолютно непрерывной на $[a_1, c_1]$ обратной функцией $x = \overline{l}_1(y)$. Значит, в этом случае, согласно (1), считая везде в дальнейшем, не ограничивая общности, что $\psi(x)\varphi(y) \geqslant 0$ при $(x, y) \in p$, можем написать

$$\mathscr{E} = 2\int\limits_a^c\int\limits_{a_1}^{c_1} \psi(x)\varphi(y)\min\{\omega_1(\rho(x)-x);\ \omega_2(\delta(y)-y)\}\,dydx =$$
$$= 2\int\limits_a^c \psi(x)\,\omega_1(\rho(x)-x)\int\limits_{a_1}^{l_1(x)} \varphi(y)\,dydx + 2\int\limits_{a_1}^{c_1} \varphi(y)\,\omega_2(\delta(y)-y)\int\limits_a^{\overline{l}_1(y)} \psi(x)\,dxdy. \tag{5}$$

Согласно определению, $\rho(c) = c$. Поэтому, интегрируя по частям и используя обозначения $\int\limits_a^x \psi(t)\,dt = \Psi(x)$, $\int\limits_{a_1}^y \varphi(z)\,dz = \Phi(y)$, получаем

$$\int\limits_a^c \psi(x)\,\omega_1(\rho(x)-x)\int\limits_{a_1}^{l_1(x)} \varphi(y)\,dydx = \int\limits_a^c \omega_1(\rho(x)-x)\,d\int\limits_a^x \psi(\tau)\,\Phi(l_1(\tau))\,d\tau =$$
$$= -\int\limits_a^c \omega_1'(\rho(x)-x)(\rho'(x)-1)\int\limits_a^x \psi(\tau)\,\Phi(l_1(\tau))\,d\tau dx. \tag{6}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{a_1}^{c_1} \varphi(y)\,\omega_2(\delta(y)-y)\int\limits_a^{\overline{l}_1(y)} \psi(x)\,dxdy = -\int\limits_{a_1}^{c_1} \omega_2'(\delta(y)-y)(\delta'(y)-1)\times$$
$$\times\int\limits_{a_1}^{y} \varphi(z)\,\Psi(\overline{l}_1(z))\,dzdy. \tag{7}$$

Далее, при каждом фиксированном $y \in [a_1, c_1]$, находим

$$\int\limits_{a_1}^{y} \varphi(z)\,\Psi(\overline{l}_1(z))\,dz = \int\limits_{a_1}^{y} \Psi(\overline{l}_1(z))\,d\int\limits_{a_1}^{z} \varphi(u)\,du = \Psi(\overline{l}_1(y))\,\Phi(y) -$$
$$-\int\limits_{a_1}^{y} \psi(\overline{l}_1'(z))\int\limits_{a_1}^{z} \varphi(u)\,dudz. \tag{8}$$

Полагая $y = l_1(x)$, будем иметь

$$i \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{a_1}^{c_1}\left[\int\limits_{a_1}^{y}\psi(\bar{l}_1(z))\,\bar{l}_1'(z)\int\limits_{a_1}^{z}\varphi(u)\,du\,dz\right]\omega_2'(\delta(y)-y)(\delta'(y)-1)\,dy =$$

$$= \int\limits_{a}^{c}\int\limits_{a_1}^{l_1(x)}\psi(\bar{l}_1(z))\,\bar{l}_1'(z)\int\limits_{a_1}^{z}\varphi(u)\,du\,dz\,\omega_2'(\delta(l_1(x))-l_1(x))(\delta'(l_1(x)-1)\,l_1'(x)\,dx.$$

Заменяя z на $l_1(\tau)$ и пользуясь вытекающими из (4) верными почти всюду на $[a, c]$ соотношениями

$$\omega_2(\delta(l_1(x)-l_1(x)) = \omega_1(\rho(x)-x),$$

$$\omega_2'[\delta(l_1(x))-l_1(x)](\delta'(l_1(x)-1))\,l_1'(x) = \omega_1'(\rho(x)-x)(\rho'(x)-1),$$

получаем

$$i = \int\limits_{a}^{c}\left[\int\limits_{a}^{x}\psi(\tau)\,\Phi(l_1(\tau))\,d\tau\right]\omega_1'(\rho(x)-x)(\rho'(x)-1)\,dx. \tag{9}$$

Видим, что значение i отличается лишь знаком от значения правой части (6). Поэтому, объединяя соотношения (4)—(8), находим

$$\mathcal{E} = -2\int\limits_{a_1}^{c_1}\Psi(\bar{l}_1(y))\,\Phi(y)\,\omega_2'(\delta(y)-y)(\delta'(y)-1)\,dy. \tag{10}$$

Ясно, что в силу симметрии также будет

$$\mathcal{E} = -2\int\limits_{a}^{c}\Phi(l_1(x))\,\Psi(x)\,\omega_1'(\rho(x)-x)(\rho'(x)-1)\,dx. \tag{10'}$$

Воспользуемся фактом, подмеченным в работе [3], с. 110: если $v(t) \in V_{a,b}^{c}$, $V(t) = \int\limits_{a}^{t} v(\tau)\,d\tau$, а $\gamma(t)$ — функция, определяющаяся на $[a, c]$ посредством равенства $V(t) = V(\gamma(t))$, $\gamma(t) \in [c, b]$, то

$$|V(t)| = |V(\gamma(t))| = \bar{V}(\gamma(t)-t), \tag{11}$$

где $\bar{V}(t)$ — перестановка функции $|V(t)|$ в убывающем порядке, т. е. функция, обратная к функции $t = M(y) = \operatorname{mes} E(|V(t)| > y)$. Из (10) и (11) следует

$$\mathcal{E} = -2\int\limits_{a_1}^{c_1}\overline{\Psi}[\rho(\bar{l}_1(y))-\bar{l}_1(y)]\,\overline{\Phi}(\delta(y)-y)\,\omega_2'(\delta(y)-y)(\delta'(y)-1)\,dy =$$

$$= -2\int\limits_{a_1}^{c_1}\overline{\Psi}[\omega_1^{-1}(\omega_2(\delta(y)-y))]\,\overline{\Phi}(\delta(y)-y)\,\omega_2'(\delta(y)-y)(\delta'(y)-1)\,dy,$$

поскольку, согласно (4), при всех $y \in [a_1, c_1]$

$$\rho(\bar{l}_1(y)) - \bar{l}_1(y) = \omega_1^{-1}(\omega_2(\delta(y)-y)). \tag{4'}$$

Полагая $\delta(y) - y = z$, получаем

$$\mathcal{E} = 2\int\limits_{0}^{b_1-a_1}\overline{\Psi}[\omega_1^{-1}(\omega_2(z))]\,\overline{\Phi}(z)\,\omega_2'(z)\,dz.$$

Аналогичные преобразования правой части выражения (10′) дадут

$$\mathcal{E} = 2\int\limits_{0}^{b-a}\overline{\Phi}[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))]\,\overline{\Psi}(x)\,\omega_1'(x)\,dx.$$

Итак, в случае, когда функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — выпуклые, строго монотонные и удовлетворяют соотношению (3),

$$\mathcal{E} = 2\int\limits_0^{b-a} \overline{\Phi}\,[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))]\,\overline{\Psi}(x)\,\omega'(x)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{b-a} \overline{\Psi}\,[\omega_1^{-1}(\omega_2(z))]\,\overline{\Phi}(z)\,\omega_2'(z)\,dz. \tag{12}$$

2. Ввиду выпуклости функций $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ их строгая монотонность может нарушаться лишь за счет участков постоянства на правых концах их областей определения. Этот факт позволяет построить последовательности $\omega_1^{(n)}(t)$ и $\omega_2^{(n)}(z)$ выпуклых строго монотонных модулей, удовлетворяющих условию (3), равномерно сходящихся к этим функциям соответственно на отрезках $[0,\, b-a]$ и $[0,\, b_1-a_1]$, и, следовательно, освободиться от условий строгой монотонности путем предельного перехода.

Условие (3) также не является обязательным. Действительно, пусть для определенности

$$\omega_1(b-a) \leqslant \omega_2(b_1-a_1). \tag{13}$$

Положим

$$y_0 = \sup_{\omega_2(\delta(y)-y)=\omega_1(b-a)} y \in [a_1,\, c_1], \tag{14}$$

и представим интеграл правой части (1) суммой интегралов, взятых по прямоугольникам $p_0 = [a \leqslant x \leqslant c,\ y_0 \leqslant y \leqslant c_1]$ и $p_1 = [a \leqslant x \leqslant c,\ a_1 \leqslant y \leqslant y_0]$.

На прямоугольнике p_0 мы находимся в условиях рассмотренного случая, поэтому

$$e_0 \overset{\mathrm{df}}{=} 2\int\limits_a^c\int\limits_{y_0}^{c_1} \psi(x)\,\varphi(y)\,\min\{\omega_1(\rho(x)-x);\ \omega_2(\delta(y)-y)\}\,dy\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{b-a} \overline{\Psi}(x)\,\overline{\Phi}_0\,[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))]\,\omega_1'(x)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\delta(y_0)-y_0} \overline{\Phi}_0(y)\,\overline{\Psi}\,[\omega_1^{-1}(\omega_2(y))]\,\omega_2'(y)\,dy, \tag{15}$$

где $\overline{\Phi}_0(y)$ — перестановка функции $\left|\int\limits_{y_0}^{y}\varphi(y)\,dy\right|$.

Легко видеть, что

$$\overline{\Phi}_0(y) = \overline{\Phi}(y) - \Phi(y_0). \tag{16}$$

Подставляя это выражение в (15), найдем

$$e_0 = 2\int\limits_0^{b-a} \overline{\Psi}(x)\,\overline{\Phi}\,[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))]\,\omega_1'(x)\,dx - 2\Phi(y_0)\int\limits_0^{b-a} \overline{\Psi}(x)\,\omega_1'(x)\,dx. \tag{17}$$

На прямоугольнике p_1 $\omega_1(\rho(x)-x) \leqslant \omega_2(\delta(y)-y)$, следовательно,

$$e_1 \overset{\mathrm{df}}{=} 2\int\limits_a^c\int\limits_{a_1}^{y_0} \psi(x)\,\varphi(y)\,\min\{\omega_1(\rho(x)-x);\ \omega_2(\delta(y)-y)\}\,dy\,dx =$$

$$= 2\int\limits_a^c\int\limits_{a_1}^{y_0} \psi(x)\,\varphi(y)\,\omega_1(\rho(x)-x)\,dy\,dx = 2\Phi(y_0)\int\limits_0^{b-a} \overline{\Psi}(x)\,\omega_1'(x)\,dx. \tag{18}$$

Объединяя соотношения (17) и (18), видим, что и в этом случае имеет место равенство (12).

Сформулируем доказанное в виде следующего утверждения.

Теорема. *Пусть* $\psi \in V^{c}_{a,b}$, $\varphi \in V^{c_1}_{a_1 b_1}$, $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(z)$ — *произвольные выпуклые модули непрерывности, для которых* $\omega_1(b-a) \leqslant \omega_2(b_1-a_1)$. *Тогда*

$$\sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}(P)} \left| \int_a^b \int_{a_1}^{b_1} \psi(x)\varphi(y) f(x, y)\, dy dx \right| = 2 \left| \int_a^c \int_{a_1}^{c_1} \psi(x)\varphi(y) \min\{\omega_1(\rho(x)-x);\right.$$

$$\left. \omega_2(\delta(y)-y)\}\, dy dx \right| = 2 \int_0^{b-a} \overline{\Psi}(x)\, \overline{\Phi}\left[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))\right] \omega_1'(x)\, dx. \qquad (19)$$

Укажем на одно из возможных приложений полученного утверждения. Предположим, что требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}(\omega_1; \omega_2) = \sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}(P)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z f(x, y)\, dt dz, \quad p = \left[|x| \leqslant \frac{\pi}{2};\right.$$

$$\left. |y| \leqslant \frac{\pi}{2} \right],$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — произвольные выпуклые модули непрерывности, для которых выполняется условие

$$\omega_1(\pi) \leqslant \omega_2(\pi). \qquad (20)$$

Поскольку в этом случае функции $\rho(t)$ и $\delta(z)$, определяющиеся по формулам (2), будут иметь вид

$$\rho(t) = -t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]; \quad \delta(z) = -z,\ z \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right],$$

то, согласно (1),

$$\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}(\omega_1; \omega_2) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t \sin z \min\{\omega_1(-2t);\ \omega_2(-2z)\}\, dz dt =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z \min\{\omega_1(2t);\ \omega_2(2z)\}\, dt dz. \qquad (21)$$

Для нахождения величины $\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}(\omega_1; \omega_2)$ воспользуемся формулой (19). В нашем случае

$$\Psi(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t dt = -\cos x, \quad \Phi(y) = -\cos y,$$

$$\overline{\Psi}(x) = (\overline{\cos x}) = \cos\frac{x}{2}, \quad \overline{\Phi}(y) = \cos\frac{y}{2}.$$

Следовательно, согласно (19) и (21),

$$\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}(\omega_1; \omega_2) = 2 \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{1}{2}\left[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))\right] \omega_1'(x)\, dx.$$

Сопоставляя это соотношение с соотношением (21), видим, что для произвольных выпуклых модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$, подчиненных условию (20), имеет место равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z \min\{\omega_1(2t);\ \omega_2(2z)\}\, dt dz =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{1}{2}\left[\omega_2^{-1}(\omega_1(x))\right] \omega_1'(x)\, dx. \tag{22}$$

В работах [4, 5] показано, что если H_{ω_1,ω_2} — класс 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant \omega_1(|x - x'|) + \omega_2(|y - y'|),$$

$\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — произвольные выпуклые модули непрерывности, а $S_{nm}(f; x, y)$ — частная прямоугольная сумма порядка (nm) ряда Фурье функции $f(x, y)$, то при произвольном возрастании натуральных чисел n и m имеет место асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}(H_{\omega_1,\omega_2};\ S_{n,m}) = \sup_{f\in H_{\omega_1,\omega_2}} \| f(x, y) - S_{n,m}(f;\ x, y)\|_C =$$

$$= \frac{8}{\pi^4} \ln n \ln m \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z \min\left\{\omega_1\left(\frac{4t}{2n+1}\right);\quad \omega_2\left(\frac{4z}{2m+1}\right)\right\} dt dz +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t dt + \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_2\left(\frac{4z}{2m+1}\right)\sin z dz +$$

$$+ O\left[\min\left\{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right);\quad \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right\}\ln nm + \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \tag{23}$$

Первый интеграл в этом равенстве, в отличие от двух последующих, даже в случае простейших модулей непрерывности,— достаточно сложный объект. Его структуру в ряде случаев удается упростить при помощи соотношения (22).

Действительно, предполагая, что

$$\omega_1\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \leqslant \omega_2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right), \tag{24}$$

и полагая

$$\tilde{\omega}_1(t) = \omega_1\left(\frac{2t}{2n+1}\right),\quad \tilde{\omega}_2(z) = \omega_2\left(\frac{2z}{2m+1}\right),$$

согласно (22), получаем

$$I_{n,m}^{(\omega_1,\omega_2)} \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z \min\left\{\omega_1\left(\frac{4t}{2n+1}\right);\quad \omega_2\left(\frac{4z}{2m+1}\right)\right\} dt dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin z \min\{\tilde{\omega}_1(2t);\ \tilde{\omega}_2(2z)\}\, dt dz = \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{1}{2}\left[\tilde{\omega}_2^{-1}(\tilde{\omega}_1(x))\right] \times$$

$$\times\ \tilde{\omega}_1'(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{1}{2}\left[\frac{2m+1}{2}\ \omega_2^{-1}\left(\omega_1\left(\frac{2x}{2n+1}\right)\right)\right] d\omega_1\left(\frac{2x}{2n+1}\right). \tag{25}$$

Если $\omega_1(t)=\omega_2(t)=\omega(t)$, $t\in\left[0, \frac{2\pi}{2n+1}\right]$, то, вводя обозначение $\lambda_{nm}=\frac{2m+1}{2n+1}$, отсюда находим

$$I_{nm}(\omega)=\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\lambda_{nm}\frac{x}{2}\,d\omega\left(\frac{2x}{2n+1}\right).$$

Предполагая, что при $n, m\to\infty$ существует предел $\lim\limits_{n,m\to\infty}\lambda_{nm}=\lambda$ (по условию (24) $\lambda\in[0, 1]$), будем иметь

$$I_{nm}(\omega)=\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\lambda\frac{x}{2}\,d\omega\left(\frac{2x}{2n+1}\right)+o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{1+\lambda}{2}\,xd\omega\left(\frac{2x}{2n+1}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{1-\lambda}{2}\,xd\omega\left(\frac{2x}{2n+1}\right)+$$

$$+o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1+\lambda}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4x}{2n+1}\right)\sin(1+\lambda)\,xdx+$$

$$+\frac{1-\lambda}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4x}{2n+1}\right)\sin(1-\lambda)\,xdx+o\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Видим, что структура интеграла $I_{nm}(\omega_1, \omega_2)$ в этом случае такая же, как и структура второго и третьего слагаемых в (23).

В случае, когда $\omega_1(t)=t^{\alpha}$, $\omega_2(z)=z^{\beta}$, $0<\alpha\leqslant 1$, из (25) следует, что

$$I_{nm}(\alpha, \beta)=\alpha\frac{2^{\alpha}}{(2n+1)^{\alpha}}\int_0^{\pi}x^{\alpha-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\gamma_{nm}}{2}\,x^{\frac{\alpha}{\beta}}\,dx,$$

где $\gamma_{nm}\equiv\gamma_{nm}(\alpha, \beta)=\frac{2m+1}{2}\left(\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Если предположить, что $\lim\limits_{n,m\to\infty}\gamma_{nm}=\gamma$, то отсюда получим

$$I_{nm}(\alpha, \beta)=\alpha\frac{2^{\alpha}}{(2n+1)^{\alpha}}\int_0^{\pi}x^{\alpha-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,x^{\frac{\alpha}{\beta}}\,dx+o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанец А. И. К одной задаче А. Н. Колмогорова в случае функций двух переменных.— УМЖ, 1972, **24**, № 5, с. 653—665.
2. Степанец А. И. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных функций двух переменных.— В кн.: Вопросы теории приближения функций и ее приложения, К., Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 132—152.
3. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, с. с. 93—124.
4. Степанец А. И. Приближение функций, удовлетворяющих условиям Липшица, суммами Фурье.— УМЖ, 1972, **24**, № 6, с. 781—799.
5. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье непрерывных функций двух переменных.— В кн.: Теория приближения функций. Тр. международной конференции по теории приближения функций. М., «Наука», 1977, с. 330—332.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
14.IX. 1976 г.