УДК 517.53

А. И. Щехорский

Контурно-телесные теоремы голоморфных функций с $\mathbf{C}^n$

Пусть $\mathbf{C}^n$ комплексное n-мерное пространство. Для $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$ под $\|z\|$ будем понимать любую из эквивалентных норм

$$\|z\| = \max\{|z_q|\}, \quad \|z\| = \sqrt{\sum_{q=1}^{n} |z_q|^2}. \tag{1}$$

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}^n$. Для всякой функции $f(\zeta)$, непрерывной на замыкании $\bar{G}$ области G, для каждого множества $E \subset \bar{G}$ и произвольной точки $z_0 \in \mathbf{C}^n$ определим модули непрерывности и локальные модули непрерывности формулами (обозначения и терминологию см. в [1], а также в [2])

$$\omega_{E,f}(\delta) = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in E \\ \|z_1 - z_2\| \leqslant \delta}} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad \omega_{\bar{E},f,z_0}(\delta) = \sup_{\substack{z \in E \\ \|z - z_0\| \leqslant \delta}} |f(z) - f(z_0)|. \tag{2}$$

Модули непрерывности называются телесными, если они взяты вдоль множества $E = \bar{G}$, и контурными, если они берутся вдоль $E = \partial G$ (см. [1]).

Исследуем условия на множество $G \subset C^n$ и мажоранту $\mu(\delta)$ типа модуля непрерывности (т. е. положительную, неубывающую, полуаддитивную функцию, заданную при $\delta > 0$ и удовлетворяющую условию $\mu(+0) = 0$), которые бы обеспечивали истинность следующих суждений:

1) если $\omega_{\partial G, f} \leqslant \mu$, то $\omega_{\bar{G}, f} \leqslant c\mu$, где c — постоянная, не зависящая от δ;

2) если в фиксированной точке $z_0 \in \partial G$ имеет место неравенство $\omega_{\partial G, f, z_0} \leqslant \mu$, то в этой точке справедлива также оценка $\omega_{\bar{G}, f, z_0} \leqslant c\mu$, где c — постоянная, не зависящая от δ. Суждения 1), 2) доказаны в работе [1] для всякой мажоранты типа модуля непрерывности и какой угодно ограниченной односвязной области $G \subset \mathbf{C}$, а также для весьма широких классов открытых множеств.

Опираясь на результаты [1] в их наиболее общем виде, устанавливаем, излагаемые ниже, контурно-телесные результаты для некоторых множеств $G \subset \mathbf{C}^n$.

Приведем результаты, характеризующие поведение голоморфных функций вблизи фиксированной точки $z_0 \in dG$. В теоремах 1—3 предполагаем, что $f(\zeta)$ — голоморфная и ограниченная функция в некотором конечном открытом множестве $G \subset \mathbf{C}^n$, а $\mu(\delta)$ — неубывающая нормальная мажоранта (см. [1]).

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — комплексный вектор $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}_{z_0,a}$ — комплексная прямая с направляющим вектором a, проходящая через точку $z_0 \in \mathbf{C}^n \setminus G$. Обозначим $G_{z_0,a} = G \cap \mathbf{C}_{z_0,a}$, $\Delta G_{z_0,a} = \mathbf{C}_{z_0,a} \setminus G_{z_0,a}$, $\mathbf{C}_a^*(z_0)$ — нижняя плотность емкости множества $\Delta G_{z_0,a}$ относительно $\mathbf{C}_{z_0,a}$ в точке z_0 (см. [1], с. 136).

Справедлив следующий многомерный аналог теоремы 6.1 из [1].

Т е о р е м а 1. *Если* $\inf \mathbf{C}_a^*(z_0) > 0$ *и*

$$\varlimsup_{\zeta \to z} |f(\zeta)| \leqslant \mu(\|z - z_0\|) \ \forall z \in \partial G, \tag{3}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c\mu(\|\zeta - z_0\|) \ \forall \zeta \in G, \tag{4}$$

где c не зависит от ζ.

С л е д с т в и е 1. *Пусть множество G локально выпукло в точке $z_0 \in \in \partial G$ (см. [3]). Тогда из оценки* (3) *следует оценка* (4)

Из следствия 1 и одного свойства строго псевдовыпуклых областей (см. [3], с. 341) вытекает следующее следствие *.

С л е д с т в и е 2. *Если G—область в $\mathbf{C}^n$, строго псевдовыпуклая в точке $z_0 \in \partial G$, то из неравенства* (3) *вытекает оценка* (4).

Для множеств $G_1, G_2, \dots, G_n \subset \mathbf{C}$ через $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ обозначим декартово произведение этих множеств.

Пусть $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ — открытое множество в $\mathbf{C}^n$, $z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^j, \dots, z_0^n) \in \mathbf{C}^n$, $z_0^j \notin G_j$. Пусть $a = (0, \dots, a_j, \dots, 0)$ $(a_j \neq 0)$, $\Gamma = \partial G_1 \times \partial G_2 \times \dots \times \partial G_n$.

Т е о р е м а 2. *Если $\mathbf{C}_a^*(z_0) > 0$ и*

$$\overline{\lim_{\zeta \to z}} |f(\zeta)| \leqslant \mu(\|z - z_0\|) \quad \forall z \in \Gamma, \tag{5}$$

то

$$|f(\zeta)| \leqslant c\mu(\|\zeta - z_0\|) \quad \forall \zeta \in G, \tag{6}$$

где постоянная c не зависит от ζ.

Пусть $i: \mathbf{C}^n \to R^{2n}$ — естественное вложение.

Условимся говорить, что граничная точка z_0 открытого множества $G \subset \subset \mathbf{C}^n$ достижима извне G усеченным конусом, если в $R^{2n} \setminus i(G)$ существует усеченный круговой конус максимальной размерности с вершиной в $i(z_0)$.

В одном из результатов (теорема 9) будем считать фиксированными размеры конуса (т. е. угол раствора при вершине, высоту и радиус основания), но не его ориентацию и положение в пространстве.

Т е о р е м а 3. *Если граничная точка z_0 открытого множества $G \subset \subset \mathbf{C}^n$ достижима извне G конусом, то из условия* (5) *следует оценка* (6).

Теоремы 1—3 позволяют установить результаты, относящиеся к суждению 2).

В последующих теоремах предполагается, что G — открытое ограниченное множество в $\mathbf{C}^n$, $f(\zeta)$ — голоморфная в G и непрерывная на $\overline{G}$ функция, z_0— произвольная точка множества ∂G. Справедливы следующие результаты.

Т е о р е м а 4. *Если G — множество из теоремы 2, то из условия*

$$\omega_{\partial G, f, z_0} \leqslant \mu \tag{7}$$

вытекает оценка

$$\omega_{\overline{G}, f, z_0} \leqslant c\mu, \tag{8}$$

где постоянная c не зависит от δ.

Т е о р е м а 5. *Если G — область в $\mathbf{C}^n$, строго псевдовыпуклая в точке z_0, то из условия* (7) *следует оценка* (8).

Т е о р е м а 6. *Если точка z_0 достижима извне открытого множества G конусом, то из условия* (7) *вытекает оценка* (8).

С помощью принципа максимума для модулей непрерывности, установленного в [1, 2], из приведенных выше теорем выводятся следующие глобальные контурно-телесные результаты, относящиеся к суждению 1).

Т е о р е м а 7. *Если G — строго псевдовыпуклая область и выполнено условие*

$$\omega_{\partial G, f} \leqslant \mu, \tag{9}$$

то

$$\omega_{\overline{G}, f} \leqslant c\mu, \quad c = \text{const}. \tag{10}$$

Т е о р е м а 8. *Пусть G — полицилиндрическое открытое множество, $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ и хотя бы одно из множгств G_j имеет на комплексной плоскости связное дополнение ΔG_j, или более обще, ΔG_j имеет положи-*

---

* Этот факт указал автору Л. И. Ронкин.

тельную нижнюю плотность емкости (*см.* [1], *с.* 136). *Тогда из условия* (9) *следует оценка* (10).

Теорема 9. *Пусть каждая граничная точка открытого множества G достижима извне G усеченным конусом фиксированных размеров. Тогда из условия* (9) *следует соотношение* (10).

Приведем еще некоторые результаты о глобальном поведении функции $f(\zeta)$.

Теорема 10. *Если для каждой граничной точки открытого множества G существует окрестность U такая, для которой все точки множества $U \cap \partial G$ являются концами параллельных между собой вещественных отрезков одинаковой длины, лежащих вне области G, то из условия* (9) *вытекает оценка* (10).

Следующая теорема обобщает результат, приведенный в [4].

Теорема 11. *Пусть G — область в $\mathbf{C}^n$, ограниченная непрерывной гиперповерхностью Γ, и для каждой точки $z \in \Gamma$ существует окрестность U и гиперплоскость λ такие, для которых $\Gamma \cap U$ взаимно однозначно проектируется в λ. Тогда из условия $\omega_{\Gamma,f} \leqslant \mu$ следует оценка $\omega_{\overline{G},f} \leqslant c\mu$, $c = \mathrm{const}$.*

В заключение автор выражает благодарность П. М. Тамразову за руководство данной работой и помощь при ее оформлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного.— Успехи мат. наук, 1973, **28**, вып. 1, с. 131—161.
2. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев: Наук. думка, 1975.— 272 с.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1976.— Ч. 2. 400 с.
4. Чирка Е. М. Аналитическое представление *CR*-функций.— Мат. сб., 1975, **98**, № 4, с. 591—623.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.V. 1977 г.