УДК 517.944

Я. С. Кушицкий

Ядра Пуассона параболических и эллиптических граничных задач, содержащих младшие члены

Полупространственные граничные задачи для параболических и эллиптических уравнений и систем с постоянными коэффициентами, содержащих группу старших производных по пространственным координатам, изучались в работах [1—8].

Хорошо известно, что при выполнении условия регулярной разрешимости (условия Шапиро—Лопатинского), которому должны удовлетворять граничные операторы, решения граничных задач в полупространстве строятся в виде сверток граничных функций с ядрами Пуассона. В работах [4, 9] установлена связь между ядрами Пуассона параболических и эллиптических граничных задач в полупространстве $x_n \geqslant 0$ для одного уравнения порядка $2b$ и для параболических по И. Г. Петровскому систем. Однако ядра Пуассона строились для таких задач, которые содержали только главные члены по порядку дифференцирования.

Данная работа посвящена построению ядер Пуассона граничных задач для параболических по В. А. Солонникову и эллиптических по А. Дуглису — Л. Ниренбергу систем с постоянными коэффициентами в полупространстве в случае, когда система и граничные операторы содержат, кроме группы старших членов, группу младших членов. Таким образом, выделен класс граничных задач, для которых возможно явное построение пуассоновских ядер. Между ядрами Пуассона параболических и эллиптических задач устанавливается такая же зависимость, как и в работе [4].

1. Параболические и эллиптические граничные задачи. Пусть $\mathfrak{D}=\{(t, x): t \in (0, \infty),\ x_\nu \in (-\infty, +\infty),\ \nu=1, 2, \ldots, n-1;\ x_n \in (0, \infty)\}$ — область в пространстве E_{n+1} точек $(t, x)=(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$; E_{n-1} — подпространство точек $x'=(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; $\tilde{\mathfrak{D}}=\{(t, \tilde{x}): t \in (0, \infty),\ x_n \in (0, \infty),\ x_\nu \in (-\infty, \infty),\ \nu=1, 2, \ldots, n-1, n+1\}$. В области $\mathfrak{D}$ рассмотрим линейную систему с комплексными постоянными коэффициентами из m уравнений, содержащих m неизвестных функций: $u_1^{(\rho)}, u_2^{(\rho)}, \ldots, u_m^{(\rho)}$

$$\sum_{j=1}^{m} l_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial t}; \frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}, \rho\right) u_j^{(\rho)}(t, x)=0, \quad k=1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Здесь ρ — вещественный параметр, от которого коэффициенты системы зависят полиномиально. Предположим, что существуют такие целые числа s_k и t_j $(k, j=1, 2, \ldots, m)$, для которых выполнены следующие условия: степень полинома $l_{kj}(\lambda^{2b}p, \lambda\xi, \lambda\rho)$ по переменной λ равна s_k+t_j, если $s_k+t_j<0$, то $l_{kj}\equiv 0$. Здесь $i=\sqrt{-1}$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; $\max\limits_k s_k=0$; $\sum\limits_{j=1}^{m}(s_j+t_j)\,2br$, $r>0$. $l_{kj}(\lambda^{2b}p, \lambda\xi, \lambda\rho)=l_{kj}^{(0)}(\lambda^{2b}p, \lambda\xi)+l_{kj}^{(1)}(\lambda^{2b}p, \lambda\xi, \lambda\rho)$, где $l_{kj}^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum\limits_{2b\nu+|\mu|=s_k+t_j} a_{kj}^{\nu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}$ — главная часть оператора l_{kj}, а $l_{kj}^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}, \rho\right)=\sum\limits_{2b\nu+|\mu|<s_k+t_j} a_{kj}^{\nu\mu}\rho^{s_k+t_j-2b\nu-|\mu|}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}$ — оператор с младшими производными.

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие параболичности. Корни полинома

$$L(p, \xi, \rho) = \det \mathfrak{L}(p, \xi, \rho) = \det \| l_{kj}(p, \xi, \rho) \|_{k,j=1,2,\dots,m}$$

по переменной p при любых вещественных (ξ, ρ) удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\, p_s \leqslant -\delta(|\xi|^2+\rho^2)^b$, $\delta > 0$. Для системы (1) ставится граничная задача:

$$\sum_{j=1}^{m} B_{qj}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \rho\right) u_j^{(\rho)}(t, x)|_{x_n=0} = \Phi_q(t, x'), \quad q = 1, 2, \dots, br. \tag{2}$$

Предположим, что существуют такие целые числа σ_q, для которых $B_{qj}(\lambda^{2b}p,\ \lambda\xi,\ \lambda\rho) = B_{qj}^{(0)}(\lambda^{2b}p,\ \lambda\xi) + B_{qj}^{(1)}(\lambda^{2b}p,\ \lambda\xi,\ \lambda\rho) = \lambda^{\sigma_q+t_j}[B_{qj}^{(0)}(p,\ \xi) + B_{qj}^{(1)}(p, \xi, \rho)]$, где $B_{qj}^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum\limits_{2b\nu+|\mu|=\sigma_q+t_j} b_{qj}^{\nu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}$ — главная часть оператора B_{qj}, а $B_{qj}^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \rho\right) = \sum\limits_{2b\nu+|\mu|<\sigma_q+t_j} b_{qj}^{\nu\mu}\rho^{\sigma_q+t_j-2b\nu-|\mu|} \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}$ — оператор с младшими производными. Из условия параболичности следует (см. [7]), что корни полинома $L(p,\ \xi',\ \tau,\ \rho)$ по переменной τ поровну распределены в верхней и нижней полуплоскостях комплексной τ-плоскости.

Полином L по переменной τ имеет br корней τ_s^+ с положительной мнимой частью и br корней τ_s^- с отрицательной мнимой частью, если

$$\mathrm{Re}\, p \geqslant -\delta_1(|\xi'|^2+\rho^2)^b, \quad 0 < \delta_1 < \delta, \quad |p|^2 + (|\xi'|^2+\rho^2)^{2b} > 0.$$

Пусть $M^+(p, \xi', \tau, \rho) = \prod\limits_{s=1}^{br}(\tau - \tau_s^+(p, \xi', \rho)) = \sum\limits_{k=0}^{br} a_k(p,\ \xi', \rho)\,\tau^{br-k}$,

$$M_s^+(p, \xi', \tau, \rho) = \sum_{k=0}^{s} a_k(p, \xi', \rho)\,\tau^{s-k}, \ s = 0, 1, \dots, br-1.$$

Из работ [1, 2, 7, 8] следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{M_{br-\nu}^+}{M^+}\tau^{l-\nu}d\tau = \begin{cases} 0, & l \neq \nu, \\ 1, & l = \nu. \end{cases}$$

Здесь γ^+ — простой замкнутый контур, охватывающий все br корни τ_s^+. Предполагается, что матрица

$$\mathfrak{B}(p, \xi', \tau, \rho) = \| B_{qj}(p, \xi', \tau, \rho) \|_{q=1,2,\dots,br}^{j=1,2,\dots,m}$$

удовлетворяет следующему алгебраическому условию.

Условие дополнительности. Строки матрицы $A(p, \xi', \tau, \rho) = \mathfrak{B}(p, \xi', \tau, \rho) \times \hat{\mathfrak{L}}(p, \xi', \tau, \rho)$, где $\hat{\mathfrak{L}} = L\mathfrak{L}^{-1}$ — матрица, взаимная к матрице $\mathfrak{L}$, линейно независимы по модулю полинома $M^+(p, \xi', \tau, \rho)$, если

$$\mathrm{Re}\, p \geqslant -\delta_1(|\xi'|^2+\rho^2)^b, \quad (|\xi'|^2+\rho^2)^{2b} > 0, \tag{3}$$

т. е. никакая линейная комбинация строк матрицы A не дает строки, каждый элемент которой делился бы без остатка на полином M^+.

Пусть A' — матрица, элементы которой — полиномы $A'_{qk} = \sum\limits_{s=1}^{br}\alpha_{qk}^{(s)}(p, \xi', \rho) \times \tau^{s-1}$, являющиеся остатками от деления элементов матрицы A на M^+.

Как показано в работе [7], условие дополнительности эквивалентно следующим утверждениям: строки матрицы A' линейно независимы как полиномы по τ или ранг матрицы

$$\mathfrak{A}(p, \xi', \rho) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} \ldots \alpha_{11}^{(br)} \ldots \alpha_{1m}^{(1)} \ldots \alpha_{1m}^{(br)} \\ \alpha_{21}^{(1)} \ldots \alpha_{21}^{(br)} \ldots \alpha_{2m}^{(1)} \ldots \alpha_{2m}^{(br)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{br,1}^{(1)} \ldots \alpha_{br,1}^{(br)} \ldots \alpha_{br,m}^{(1)} \ldots \alpha_{br,m}^{(br)} \end{pmatrix}$$

равен br при любых вещественных ξ', ρ и любом p, удовлетворяющем условию (3).

Предположим, что выполнены условия согласования с нулем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} \Phi_q(t, x')|_{t=0} = 0, \ \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k-\sigma_q}{2b}\right],$$

$$q = 1, 2, \ldots, br, \ k \geqslant \sigma_0 = \max(0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{br}).$$

Для задачи (1), (2) ставятся нулевые начальные условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} u_j^{(\rho)}(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k+t_j}{2b}\right], \ j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Так как ранг матрицы $\mathfrak{A}$ равен br, то для нее существует правая обратная матрица $\mathfrak{A}^{-1}$ такая, для которой $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = E$, где E—единичная квадратная матрица размеров $br \times br$,

$$\mathfrak{A}^{-1}(p, \xi', \rho) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1,1)} & \alpha_1^{(1,2)} & \ldots & \alpha_1^{(1,br)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{br}^{(1,1)} & \alpha_{br}^{(1,2)} & \ldots & \alpha_{br}^{(1,br)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(m,1)} & \alpha_1^{(m,2)} & \ldots & \alpha_1^{(m,br)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{br}^{(m,1)} & \alpha_{br}^{(m,2)} & \ldots & \alpha_{br}^{(m,br)} \end{pmatrix}$$

Введем вспомогательную координату x_{n+1}. Для этого каждое уравнение системы (1) и граничных условий (2) умножим на $e^{i\rho x_{n+1}}$. После этого введем обозначения

$$u_i^{(\rho)}(t, x)\, e^{i\rho x_{n+1}} = v_i^{(\rho)}(t, \tilde{x}), \tag{5}$$

где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$. Так как $\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^{\lambda} e^{i\rho x_{n+1}} = \rho^{\lambda} e^{i\rho x_{n+1}}$, а

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^{\lambda} v_i^{(\rho)}(t, \tilde{x}) = \rho^{\lambda} e^{i\rho x_{n+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} u_i^{(\rho)}(t, x),$$

то граничная задача для функций $v_j^{(\rho)}(t, \tilde{x})$, рассматриваемых в области $\tilde{\mathfrak{D}}$, будет содержать только старшие члены по порядку дифференцирования: $2b\nu + |\mu| + \lambda = s_k + t_j$ в уравнениях системы и $2b\nu + |\mu| + \lambda = \sigma_q + t_j$ в граничных условиях. Эта задача в матричном виде записывается следующим образом:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) v^{(\rho)}(t, \tilde{x}) = 0, \tag{1'}$$

$$\mathfrak{B}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) v^{(\rho)}(t, \tilde{x})|_{x_n=0} = e^{i\rho x_{n+1}}\Phi(t, x'), \tag{2'}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu} v_j^{(\rho)}(t, \tilde{x})|_{t=0} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k+t_j}{2b}\right]; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4'}$$

Здесь $\Phi(t, x')$ — вектор-столбец с компонентами $\Phi_q(t, x')$, $q = 1, 2, \ldots, br$. Построим, следуя [7], ядра Пуассона $G_{jq}(t, \tilde{x})$ задачи (1′), (2′), (4′) и сделаем преобразование Фурье по введенной вспомогательной координате, тогда получим ядра Пуассона задачи (1), (2), (4) с группой младших членов: $G_{jq}^{(\rho)}(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{jq}(t, \tilde{x})\, e^{-i\rho x_{n+1}} dx_{n+1}$. В развернутом виде получим следующие выражения для этих ядер:

$$G_{jq}^{(\rho)}(t, x) = -\frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{i\sigma' x'} d\sigma' \int\limits_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} e^{pt} \left(\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma+} \frac{N_{kq} L_{kj}}{M^+} e^{i\sigma_n x_n} d\sigma_n \right) dp;$$

здесь $\sigma' x' = \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\nu x_\nu$; $a_0 = \operatorname{Re} p > 0$; $q = 1, 2, \ldots, br$; $j = 1, 2, \ldots, m$;

$N_{kq}(p, \sigma, \rho) = \sum\limits_{s=1}^{br} \alpha_s^{(k,q)}(p, \sigma', \rho)\, M_{br-s}^{+}(p, \sigma, \rho)$; $L_{kj}(p, \sigma, \rho)$ — алгебраические дополнения элементов $l_{kj}(p, \sigma, \rho)$ в определителе L; $\alpha_s^{(k,q)}$ — элементы правой обратной матрицы $\mathfrak{A}^{-1}$, а γ^+ — гладкий замкнутый жорданов контур, охватывающий все корни полинома $M^+(p, \sigma, \rho)$.

Решение задачи (1), (2), (4) можно представить в виде

$$u_j^{(\rho)}(t, x) = \sum_{q=1}^{br} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_{n-1}} G_{jq}^{(\rho)}(t-\tau, x-\xi')\, \Phi_q(\tau, \xi')\, d\xi', \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Рассмотрим в полупространстве $x_n \geqslant 0$ граничную задачу для системы, эллиптической в смысле А. Дуглиса—Л. Ниренберга:

$$\tilde{\mathfrak{L}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) v^{(\rho)}(\tilde{x}) = 0, \tag{6}$$

$$\tilde{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right) v^{(\rho)}(\tilde{x})|_{x_n=0} = e^{i\rho x_{n+1}}\varphi(x'), \tag{7}$$

получаемую из системы (1′) и граничных условий (2′), если там коэффициенты при всех производных вида $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\nu}$ положить равными нулю.

С помощью функции $G(z; M)$ из [2] ядра Пуассона K_{jl} задачи (6), (7) строятся следующим образом:

$$K_{jl}(\tilde{x}) = \int\limits_{|\tilde{\xi}'|=1} d\omega_{\tilde{\xi}'} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma+} G(\tilde{x}\tilde{\xi};\ \sigma_l + t_j - n)\, \frac{N_{jl}(\tilde{\xi})}{M^+(\tilde{\xi})}\, d\tilde{\xi}_n. \tag{8}$$

Тогда решение граничной задачи (6), (7) строится в виде сверток граничных функций с ядрами Пуассона:

$$v_j^{(\rho)}(\tilde{x}) = \sum_{l=1}^{br} i^{\sigma_l + t_j} \int\limits_{E_n} K_{jl}(\tilde{x} - \tilde{\xi}')\, e^{i\rho\xi_{n+1}} \varphi_l(\xi')\, d\tilde{\xi}', \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Параболической задаче с «младшими членами» (1), (2), (4) отвечает эллиптическая задача с «младшими членами»

$$\tilde{\mathfrak{L}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \rho\right) w^{(\rho)}(x) = 0, \tag{6'}$$

$$\tilde{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \rho\right) w^{(\rho)}(x)|_{x_n=0} = \varphi(x'), \tag{7'}$$

причем ее решение $w_j^{(\rho)}(x)$ связано с функциями $v_j^{(\rho)}(\tilde{x})$ соотношением

$$v_j^{(\rho)}(\tilde{x}) = w_j^{(\rho)}(x)\, e^{i\rho x_{n+1}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Так что из (9) и (10) имеем

$$w_j^{(\rho)}(x) = e^{-i\rho x_{n+1}} v_j^{(\rho)}(x) = \sum_{l=1}^{br} i^{\sigma_l + t_j} \int\limits_{E_{n-1}} \varphi_l(\xi')\, d\xi' \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{jl}(\tilde{x} - \tilde{\xi}')\, e^{-i\rho(x_{n+1} - \xi_{n+1})} d\xi_{n+1} = \sum_{l=1}^{br} i^{\sigma_l + t_j} \int\limits_{E_{n-1}} K_{jl}^{(\rho)}(x - \xi')\, \varphi_l(\xi')\, d\xi',$$

где ядра Пуассона $K_{jl}^{(\rho)}$ задачи (6′), (7′) — преобразования Фурье ядер K_{jl} по вспомогательной $(n+1)$-й координате:

$$K_{jl}^{(\rho)}(x - \xi') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{jl}(x - \xi', \lambda)\, e^{-i\rho\lambda} d\lambda.$$

Теорема. *Пусть даны граничная задача с нулевыми начальными условиями для параболической по В. А. Солонникову системы с группой «младших производных» и соответствующая ей граничная задача для эллиптической по А. Дуглису — Л. Ниренбергу системы. Если выполнены условия дополнительности, то*

$$\int\limits_0^{\infty} G_{jl}^{(\rho)}(t, x)\, dt = i^{\sigma_l + t_j} K_{jl}^{(\rho)}(x)$$

при $\sigma_l + t_j < n - 1$, *кроме того,*

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G_{jl}^{(\rho)}(t, x)\, dt = i^{\sigma_l + t_j} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k K_{jl}^{(\rho)}(x)$$

для всех k *таких, для которых* $|k| \geqslant \sigma_l + t_j - n + 1$.

Доказательство этой теоремы проводится по схеме, изложенной в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. 1.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 203 с.
2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solution of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. II.— Comm. pure. appl. Math., 1964, **17**, N 1, p. 35—92.
3. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа.— Изд-во Львовск. ун-та, 1961.— 113 с.
4. Кушицкий Я. С. О стабилизации решений параболической граничной задачи.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 6, с. 766—779.
5. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга. 1.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, **28**, № 3, с. 665—706.

6. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга. 2.— Тр. Математического ин-та АН СССР, 1966, **92**, с. 233—297.
7. Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.— Тр. Математического ин-та АН СССР, 1965, **83**. — 162 с.
8. Эйдельман С. Д. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.
9. Эйдельман С. Д., Житарашу Н. В. О стабилизации решения общей краевой задачи для параболической системы в полупространстве.— Тезисы докл. XX научной сессии Черновицкого ун-та, 1964, с. 3—5.

Никопольский общетехнический факультет
Днепропетровского металлургического института

Поступила в редакцию
29.XI.1977 г.