УДК 517.53

Ю. И. Мельник

Об одной универсальной системе экспонент

1. Пусть D—открытая выпуклая область с опорной функцией $K(\varphi) > 0$, $L(z)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором $h_L(\varphi) = K(-\varphi)$ и с простыми нулями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$. Положим $\Lambda_L = \{\lambda_k, k = 1, 2, \ldots\}$.

Теорема A (см. [1]). *Если $L(z)$ — целая функция вполне регулярного роста* и выполняется условие*

$$|L'(\lambda_k)| > (h_L(\varphi_k) - \varepsilon) r_k \tag{1}$$

($\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $\varepsilon > 0$ — *любое*, $k > k_\varepsilon$, k_ε *зависит от* ε), *то любая регулярная в D функция $f(z)$ может быть представлена в D (абсолютно сходящимся) рядом экспонент вида*

$$f(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda_L} f_\lambda e^{\lambda z}. \tag{2}$$

Отметим, что в теореме A целая функция $L(z)$, а вместе с ней и система экспонент $\{e^{\lambda z}, \lambda \in \Lambda_L\}$ зависят от D.

Докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \left\{\lambda_{n,m} \overset{\text{df}}{=} n^2 \exp\left(\frac{2\pi i}{n^2} m\right),\ n = 1, 2, \ldots;\ m = 0, 1, \ldots, n^2 - 1\right\}$, *$D$—произвольное открытое выпуклое множество с опорной функцией $K(\varphi) > 0$. Если $K(\varphi)$ имеет абсолютно непрерывную производную $K'(\varphi)$ и*

$$|K''(\varphi)| \leqslant \text{const} < \infty, \tag{3}$$

то любая регулярная в D функция $f(z)$ может быть представлена в D (абсолютно сходящимся) рядом экспонент вида

$$f(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{f}_\lambda e^{\lambda z}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Любая целая функция $f(z)$ может быть представлена по всей плоскости (абсолютно сходящимся) рядом экспонент вида* (4).

2. Для доказательства теоремы 1 потребуются некоторые вспомогательные построения. Положим

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(H'(\theta) - H'(0) + \int_0^\theta H(u)\, du\right), \quad H(\theta) = K(-\theta), \tag{5}$$

---

* Изложение свойств целых функций см. в [2, гл. I], [3, гл. II, III].

$$m_{n,j}=\left[\Delta\left(\frac{2\pi}{n}(j+1)\right)(2n-1)\right]-\left[\Delta\left(\frac{2\pi}{n}j\right)(2n-1)\right]^*, \tag{6}$$

$$n=1,2,\ldots,\quad j=0,1,\ldots,n-1,$$

$$\zeta_{n,j}^{(p)}=n^2\exp\left\{\frac{2\pi i}{n}j+\frac{2\pi ip}{nm_{n,j}}\right\}, \tag{7}$$

$$n=1,2,\ldots,\ j=0,1,\ldots,n-1,\quad p=0,1,\ldots,m_{n,j}-1\quad (m_{n,j}\geqslant 1).$$

В силу (3), (5), (6), очевидно, выполняются неравенства

$$|\Delta'(\theta)|\leqslant \text{const}<\infty\qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), \tag{8}$$

$$m_{n,j}\leqslant \text{const}<\infty. \tag{9}$$

Поэтому при $n>n_0$ (n_0 — достаточно большое натуральное число) для каждой точки $\zeta_{n,j}^{(p)}$ можно подобрать по одной точке $\lambda_{n,j}^{(p)}$ из множества Λ так, чтобы выполнялись условия:

$$\lambda_{n,j}^{(p)}\neq\lambda_{n',j'}^{(p')},\ \text{если}\ \zeta_{n,j}^{(p)}\neq\zeta_{n',j'}^{(p')},\ |\zeta_{n,j}^{(p)}|=|\lambda_{n,j}^{(p)}|,\ |\arg\zeta_{n,j}^{(p)}-\arg\lambda_{n,j}^{(p)}|=O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{10}$$

(здесь и далее оценки вида $O(\cdot)$ считаются равномерными по всем не входящим в них параметрам, встречающимся в данном выражении). Положим $\Lambda_\Delta=\{\lambda_{n,j}^{(p)},\ n=n_0+1,\ldots;\ j=0,\ldots,n-1;\ p=0,\ldots,m_{n,j}-1\ (m_{n,j}\geqslant 1)\}$.

Лемма. *Множество Λ_Δ удовлетворяет условиям:*

1) $\Lambda_\Delta\subset\Lambda$;

2) *при любом $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ существует предел $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n(r,\theta)}{r}=\Delta(\theta)$, где $n(r,\theta)$ — число точек из Λ_Δ в секторе $|z|<r$, $0<\arg z<\theta$;*

3) *существует предел* $s=\lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_\Delta,|\lambda|<r}\frac{1}{\lambda}$;

4) *существует такое $d>0$, для которого при $\lambda\in\Lambda_\Delta$ кружки радиусов $r_\lambda\overset{\text{df}}{=}d\sqrt{|\lambda|}$ с центрами в точках λ не пересекаются.*

Доказательство. Выполнение условия 1) очевидно; условие 4) следует из (7) — (10). Докажем условие 2). Положим $n_r=\max\limits_n\{n: n^2<r\}$. Используя (6), (8), при $r\to\infty$ получаем

$$\frac{n(r,\theta)}{r}=\frac{1}{r}\sum_{n=n_0+1}^{n_r}\ \sum_{j=0}^{\left[\frac{\theta}{2\pi}n\right]-1}m_{n,j}=\frac{1}{r}\sum_{n=n_0+1}^{n_r}\left[\Delta\left(\frac{2\pi}{n}\left[\frac{\theta}{2\pi}n\right]\right)(2n-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{n=n_0+1}^{n_r}(\Delta(\theta)(2n-1)+O(1))=\Delta(\theta)\frac{1}{r}n_r^2+O(r^{-\frac{1}{2}})=$$

$$=\Delta(\theta)+O(r^{-\frac{1}{2}})\to\Delta(\theta).$$

Докажем условие 3). При $m_{n,j}\geqslant 1$ имеем

$$\left|\int_{\frac{2\pi}{n}j}^{\frac{2\pi}{n}(j+1)}e^{-ix}dx-\frac{2\pi}{n}\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}j-\frac{2\pi ip}{nm_{n,j}}\right\}\right|=$$

* Здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x.

$$=\left|\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\int\limits_{\frac{2\pi}{n}j+\frac{2\pi p}{nm_{n,j}}}^{\frac{2\pi}{n}j+\frac{2\pi(p+1)}{nm_{n,j}}}\left(e^{-ix}-\exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}j-\frac{2\pi ip}{nm_{n,j}}\right\}\right)dx\right|\leqslant\frac{(2\pi)^2}{n^2m_{n,j}}. \quad (11)$$

Аналогично,

$$\left|\int\limits_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\Delta(\theta)-\sum_{j=0}^{n-1}e^{-\frac{2\pi i}{n}j}\left\{\Delta\left(\frac{2\pi}{n}(j+1)\right)-\Delta\left(\frac{2\pi}{n}j\right)\right\}\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{2\pi}{n}j}^{\frac{2\pi}{n}(j+1)}\left(e^{-i\theta}-e^{-\frac{2\pi i}{n}j}\right)d\Delta(\theta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\frac{2\pi}{n}\left\{\Delta\left(\frac{2\pi}{n}(j+1)\right)-\Delta\left(\frac{2\pi}{n}j\right)\right\}=O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (12)$$

Используя (7), (9) — (12) и учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\Delta(\theta)=0$ (см. [3, с. 84]), получаем*

$$s_n\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\frac{1}{\lambda_{n,j}^{(p)}}=\frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{m_{n,j}-1}\exp\left\{-\frac{2\pi i}{n}j-\frac{2\pi ip}{nm_{n,j}}\right\}+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}e^{-ix}dx\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\left[\Delta\left(\frac{2\pi}{n}(j+1)\right)(2n-1)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\Delta\left(\frac{2\pi}{n}j\right)(2n-1)\right]\right\}e^{-\frac{2\pi i}{n}j}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}e^{-ix}dx\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\Delta\left(\frac{2\pi}{n}(j+1)\right)-\Delta\left(\frac{2\pi}{n}j\right)\right\}e^{-\frac{2\pi i}{n}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}}e^{-ix}dx\int\limits_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\Delta(\theta)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Отсюда следует выполнение условия 3). Этим лемма доказана.

---

*Здесь считается, что $\sum\limits_{p=0}^{-1}\overset{\mathrm{df}}{=}0$.

3. Доказательство теоремы 1. Отправляясь от счетного множества Λ_Δ из п. 2, построим каноническое произведение

$$L(z) = e^{s_\Delta z} \prod_{\lambda \in \Lambda_\Delta} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda}},$$

где

$$s_\Delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) e^{i\theta} d\theta - \lim_{r \to \infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_\Delta, |\lambda| < r} \frac{1}{\lambda}.$$

Из условий 1)—3) леммы следует (см. [3, с. 205, 122, 121, 84, 604]), что $L(z)$ — целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста с индикатором $h_L(\varphi) = H(\varphi) = K(-\varphi)$ и с простыми нулями, причем

$$\Lambda_L = \Lambda_\Delta \subset \Lambda. \tag{13}$$

Отсюда и из условия 4) леммы легко следует, что $L(z)$ удовлетворяет условию (1) (см. [4]). Таким образом, функция $L(z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы A. По теореме A, для любой регулярной в D функции $f(z)$ имеет место (2). В силу (13) для завершения доказательства теоремы осталось положить

$$\tilde{f}_\lambda = \begin{cases} f_\lambda, & \text{если } \lambda \in \Lambda_\Delta, \\ 0, & \text{если } \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_\Delta. \end{cases}$$

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция. Тогда (см. [2, с. 479]) существует уточненный порядок

$$\rho(r) = 1 + \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \to 0, \quad \psi'(x) \to 0 \quad (x \to \infty), \tag{14}$$

такой, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{\varphi(n)}{n} \qquad (n \geqslant 1), \tag{15}$$

где $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$. Положим

$$h(r) = r^{\rho(r)}, \ \mu(r) = 2rh'(r^2), \ \mu_n = [\mu(n)], \ \zeta_{n,j} = n^2 e^{\frac{2\pi i}{\mu_n} j} \qquad (j = 0, \ldots, \mu_n - 1). \tag{16}$$

В силу (14) $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$ $(n \to \infty)$. Поэтому при $n > n_0$ (n_0 — достаточно большое натуральное число) для каждой точки $\zeta_{n,j}$ можно подобрать по одной точке $\lambda_{n,j}$ из множества Λ так, чтобы выполнялись условия: $\lambda_{n,j} \neq \lambda_{n',j'}$, если $\zeta_{n,j} \neq \zeta_{n',j'}$,

$$|\lambda_{n,j}| = |\zeta_{n,j}|, \quad |\arg \lambda_{n,j} - \arg \zeta_{n,j}| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{17}$$

Положим $\Lambda_f = \{\lambda_{n,j}, \ n = n_0 + 1, \ldots; \ j = 0, 1, \ldots, \mu_n - 1\}$. Ясно, что $\Lambda_f \subset \Lambda$. Используя (17), (16) и обозначая через $n(r, \theta)$ число точек из Λ_f в секторе $|z| < r$, $0 < \arg z < \theta$, нетрудно показать, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \theta)}{r^{\rho(r)}} = \frac{\theta}{2\pi}, \qquad \lim_{r \to \infty} r^{-\rho(r)+1} \sum_{\lambda \in \Lambda_f, |\lambda| < r} \frac{1}{\lambda} = 0,$$

откуда следует (см. [3, с. 205, 122, 121, 84, 604]), что каноническое произведение $L(z) = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda_f} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda}}$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ вполне регулярного роста с индикатором, тождественно равным единице. Это означает, что

$$\ln |L(re^{i\theta})| = r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \tag{18}$$

когда $r \to \infty$, пробегая все значения, за исключением некоторого множества нулевой относительной меры. Далее, используя (17), (16), заключаем, что множество нулей Λ_L ($\Lambda_L \equiv \Lambda_f$) функции $L_f(z)$ регулярно, откуда (поступая по схеме работы [4]) находим, что

$$\ln |L'(\lambda)| = |\lambda|^{\rho(|\lambda|)} + o(|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}) \; (\lambda \in \Lambda_f, \; |\lambda| \to \infty). \tag{19}$$

В силу (15) $f(z) \in B(L_f)$ (определение класса $B(L_f)$ см. в [2, с. 455]) и тогда из (18), (19), (14) следует (см. [2, с. 478]), что функцию $f(z)$ можно представить во всей плоскости (абсолютно сходящимся) рядом экспонент вида $f(z) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda_f} f_\lambda e^{\lambda z}$. В силу $\Lambda_f \subset \Lambda$ для завершения доказательства теоремы осталось положить

$$\tilde{f}_\lambda = \begin{cases} f_\lambda, & \text{если } \lambda \in \Lambda_f, \\ 0, & \text{если } \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_f. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельник Ю. И. К вопросу о представлении регулярных функций рядами Дирихле.— Мат. заметки, 1977, **21**, № 5, с. 641—651.
2. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
4. Мельник Ю. И. К вопросу о разложении аналитических функций в ряды Дирихле.— Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 6, с. 815—818.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
11.I.1978 г.