УДК 519.46

З. И. Москаленко

О существовании компактных вполне несвязных групп с локально компактной, но некомпактной группой топологических автоморфизмов

Группу $A(G)$ всех непрерывных автоморфизмов компактной группы G можно рассматривать как топологическую группу, приняв за базу окрестностей тождественного автоморфизма систему подмножеств

$$P(V) = \{\alpha \in A(G) : \alpha(g) \in gV,\ \forall g \in G\},$$

где V пробегает базу окрестностей единицы в G [1].

В. П. Платоновым поставлен вопрос: следует ли из локальной компактности группы $A(G)$ непрерывных автоморфизмов компактной вполне несвязной группы G компактность $A(G)$? В работе [2] получено решение этого вопроса для абелевой группы G; более того, там описаны все компактные вполне несвязные абелевы группы с локально компактной группой автоморфизмов. В данной работе построен пример разрешимой компактной вполне несвязной группы G с локально компактной, но некомпактной группой $A(G)$.

Заметим, что имеет место следующее утверждение, установленное в [3].

Предложение 1. *Пусть G — компактная вполне несвязная группа с конечным числом топологических образующих. Тогда группа $A(G)$ компактна.*

Итак, компактная вполне несвязная группа G с локально компактной, но некомпактной группой $A(G)$ не может иметь конечного множества топологических образующих.

Сформулируем вспомогательное утверждение, необходимое для установления последующих результатов.

Предложение 2. *Пусть p — фиксированное простое число; $b = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(b) p^j$ — произвольное целое p-адическое число; $q = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu(q) p^\nu$ — целое p-адическое число, для которого $b_0(q) = 1$ $(0 \leqslant \beta_j(b) < p;\ 0 \leqslant \beta_\nu(q) < p)$.*

Зададим последовательность целых p-адических чисел вида $b_q^{(n)} = q^{\sum_{j=0}^{n} \beta_j(b) p^j}$, где $n = 1, \ldots$

Справедливы следующие утверждения.

1. Определено целое p-адическое число $b_q = \lim_{n\to\infty} b_q^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(b_q) p^j$, где $\beta_0(b_q) = 1$.

2. Если c — произвольное целое p-адическое число, то $(b+c)_q = b_q c_q$ $(bc)_q = b_{c_q} = c_{b_q}$.

3. $b_q = 1$ тогда и только тогда, когда $b = 0$ или $q = 1$.

Доказательство справедливости указанных утверждений здесь не приводим; его можно получить, учитывая свойства последовательностей элементов локально компактных топологических тел и структуру поля K_0^p p-адических чисел [4, 5].

Перейдем к построению компактной вполне несвязной группы с локально компактной, но некомпактной группой $A(G)$. Построим сначала группу L, не имеющую конечного множества топологических образующих, для которой группа $A(L)$ компактна.

Пусть A — топологическая прямая сумма групп A_i, где $A_i \cong I_p$, $i \in I$, I_p — аддитивная группа целых p-адических чисел, I — множество натуральных чисел; $B \cong I_p$.

Группу L строим как полупрямую сумму групп A и B, где $A \lhd L$. Определим действие B на A_i.

Для произвольного элемента b из B и произвольного $a_{i\alpha}$ из A_i положим: $\sigma_b(a_{i\alpha}) = -b + a_{i\alpha} + b = b_i a_{i\alpha}$, где $b_i = b_{1+p^i}$ (в обозначениях предложения 2).

Вследствие предложения 2, b_i — обратимый элемент кольца целых p-адических чисел для произвольного $b \in B$, и для каждого b из B отображение σ_b определяет топологический автоморфизм каждой из групп A_i, следовательно, σ_b задает топологический автоморфизм на A.

Рассмотрим отображение $(a, b) \to \sigma_b(a)$ тихоновского произведения $A \times B$ пространств A, B в A.

Пусть U — произвольная окрестность элемента $\sigma_b(a)$ в A. Существуют такие целые числа k, l, что $U \supset \sigma_b(a) + V(k, l)$, где $V(k, l)$ — прямая сумма множеств V_{ki} $(i \in I,\ i \leqslant l)$ и групп A_s $(s \in I,\ s > l)$, V_{ki} — окрестность нуля в A_i, изоморфная окрестности U_k в I_p, состоящей из всех целых p-адических чисел вида $\sum_{j=k}^{\infty} \beta_j p^j$ $(0 \leqslant \beta_j < p)$. Пусть W_k — окрестность нуля в B, изоморфная U_k.

Пусть x — произвольный элемент из $a+V(k, l)$, y — произвольный элемент из $b+W_k$. i-я координата элемента $\sigma_y(x)$ равна $y_i x_i$ ($i \in I$, x_i — координата x в A_i).

$$x_i = a_i + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} p^j;\ y = b + \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j p^j;\ 0 \leqslant \gamma_{ij} < p;\ 0 \leqslant \beta_j < p;\ i \leqslant l.$$

$$y_i = b_i \lim_{n\to\infty} (1+p^i)^{\sum\limits_{j=k}^{n} \beta_j p^j} = b_i \left(1 + \sum_{j=k}^{\infty} \delta_{ij} p^j\right), \text{ где } 0 \leqslant \delta_{ij} < p.$$

$$y_i x_i = \left(a_i + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} p^j\right) b_i \left(1 + \sum_{j=k}^{\infty} \delta_{ij} p^j\right) = a_i b_i + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \in V_{ki},\ i \leqslant l.$$

Отсюда следует: $\sigma_y(x) \in \sigma_b(a) + V(k, l) + U$ для произвольных $x \in a + V(k, l)$; $y \in b + W_k$, и отображение $(a, b) \to \sigma_b(a)$ произведения $A \times B$ в A непрерывно.

Вследствие [6, с. 33 — 41], на произведении топологических пространств A и B определена топологическая полупрямая сумма L групп A и B.

Рассмотрим группу $A(L)$ топологических автоморфизмов группы L. Зафиксируем в каждой из групп A_i элемент a_i^*, топологически порождающий A_i, а в B — элемент b^*, топологически порождающий B. Очевидно, всякий автоморфизм $\varphi \in A(L)$ полностью определен заданием образов $\varphi(a_i^*)$ и $\varphi(b^*)$, где $i \in I$.

Коммутант L' группы L равен прямой сумме подгрупп V_{ii} по всем $i \in I$, $V_{ii} \in A_i$. L' — характеристическая подгруппа в L, следовательно, для произвольного $\varphi \in A(L)$ и для произвольного $i \in I$ $\varphi(p^i a_i^*) \in L' \subset A$.

Допустим, что для некоторого φ из $A(L)$ и для некоторого $i \in I$ $\varphi(a_i^*) = \tilde{b} + \tilde{a}$, где $\tilde{a} \in A$; $0 \neq \tilde{b} \subset B$. $\varphi(p^i a_i^*) = p^i \varphi(a_i^*) = p^i(\tilde{b} + \tilde{a}) = p^i \tilde{b} + \tilde{\tilde{a}}$, где $\tilde{\tilde{a}} \in A$; $p^i \tilde{b} \notin A$, и $\varphi(p^i a_i^*) \notin A$. Отсюда получим: $\tilde{b} = 0$; $\varphi(a_i^*) \in A$; A — характеристическая подгруппа в L.

Для произвольного $\varphi \in A(L)$ и произвольного $i \in I$ $\varphi(a_i^*) = \sum\limits_{j\in I} \lambda_{ij} a_j^*$, где λ_{ij} — целые p-адические числа; $\varphi(b^*) = a + b^* + b_1$, где $a \in A$, $b_1 \in B$.

Рассмотрим коммутатор $[\varphi(b^*), \varphi(a_i^*)]$.

$$[\varphi(b^*), \varphi(a_i^*)] = [b^* + b_1, \varphi(a_i^*)] = -b_1 - b^* - \varphi(a_i^*) + b^* + b_1 + \varphi(a_i^*) = \\ = \sum_{j\in I} (-b_{1j} b_j^* + 1) \lambda_{ij} a_j^*.$$

С другой стороны, $[\varphi(b^*), \varphi(a_i^*)] = \varphi([b^*, a_i^*]) = \varphi(-b^* - a_i^* + b^* + a_i^*) = \varphi(-b_i^* a_i^* + a_i^*) = (1 - b_i^*)\varphi(a_i^*) = (1 - b_i^*) \sum\limits_{j\in I} \lambda_{ij} a_j^*$.

Сравнивая коэффициенты при a_j^* в полученных выражениях $[\varphi(b^*), \varphi(a_i^*)]$ и учитывая предложение 2, получаем: $b_1 = 0$, $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, что все подгруппы A_i характеристичны, и для произвольного автоморфизма $\varphi \in A(L)$ и произвольного элемента $b \in B$ $\varphi(b) = a + b$, где $a \in A$. Из характеристичности A_i следует, что λ_{ii}^{-1} — целые p-адические числа при $i \in I$.

Пусть $T^{(i)}$ — подмножество автоморфизмов $\varphi^{(i)} \in A(L)$, где $\varphi^{(i)}(a_i^*) = \lambda_{ii} a_i^*$; $\varphi^{(i)}(a_j^*) = a_j^*$ при $j \neq i$; $\varphi^{(i)}(b^*) = b^*$; T — подмножество автоморфизмов $\psi \in A(L)$, где $\psi(a_i^*) = a_i^*$; $\psi(b^*) = a + b^*$; $a \in A$.

Из сказанного выше следует, что всякий автоморфизм $\varphi \in A(L)$ представим в виде $\varphi = \psi = \prod_{i \in I} \varphi^{(i)}$ и задается множеством $\{\lambda_{ii}\}$ целых обратимых p-адических чисел и элементом $a \in A$.

Покажем, что произвольное множество целых обратимых p-адических чисел λ_{ii} и произвольный элемент $a \in A$ определяют автоморфизм группы L; в частности, $\varphi^{(i)}$ — автоморфизм при произвольном λ_{ii} указанного вида, ψ — автоморфизм при произвольном значении $a \in A$.

Для заданного набора λ_{ii} и заданного a определяем

$$\varphi(a_i^*) = \psi \prod_{j \in I} \varphi^j (a_i^*) = \lambda_{ii} a_i^*, \ \varphi(b^*) = a + b^* = \sum_{i \in I} \mu_i a_i^* + b^*.$$

Учитывая предложение 2, для произвольного элемента σb^* из B (σ — произвольное целое p-адическое число) получаем:

$$\varphi(\sigma b^*) = \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma_{b_i^{*-1}} - 1)(b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + \sigma b^*.$$

Для произвольного элемента $x = \sum_{j \in I} c_i a_i^* + \sigma b^*$ группы L получаем

$$\varphi(x) = \sum_{j \in I} c_i \varphi(a_i^*) + \varphi(\sigma b^*) = \sum_{i \in I} c_i \lambda_{ii} a_i^* + \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma_{b_i^{*-1}} - 1)(b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + \sigma b^*.$$

Для элементов $x_1 = \sum_{i \in I} c_i^1 a_i^* + \sigma^1 b^*$, $x_2 = \sum_{i \in I} c_i^2 a_i^* + \sigma^2 b^*$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi\left(\sum_{i \in I} c_i^1 a_i^* + \sum_{i \in I} c_i^2 (\sigma^1 b^*)_i^{-1} a_i^* + (\sigma^1 + \sigma^2) b^*\right) =$$

$$= \sum_{i \in I} (c_i^1 + c_i^2 (\sigma^1 b^*)_i^{-1} \lambda_{ii} a_i^* + \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma^1_{b_i^{*-1}} \sigma^2_{b_i^{*-1}} - 1) \times$$

$$\times (b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + (\sigma^1 + \sigma^2) b^*).$$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \sum_{i \in I} c_i^1 \lambda_{ii} a_i^* + \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma^1_{b_i^{*-1}} - 1)(b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + \sigma^1 b^* +$$

$$+ \sum_{i \in I} c_i^2 \lambda_{ii} a_i^* + \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma^2_{b_i^{*-1}} - 1)(b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + \sigma^2 b^* = \sum_{i \in I} c_i^1 \lambda_{ii} a_i^* +$$

$$+ \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma^1_{b_i^{*-1}} - 1)(b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + \sum_{i \in I} c_i^2 \lambda_{ii} (\sigma^1 b^*)_i^{-1} + \sum_{i \in I} \mu_i (\sigma^1 b^*)_i^{-1} \times$$

$$\times \sigma^2_{b_i^{*-1}} - (\sigma^1 b^*)_i^{-1} (b_i^{*-1} - 1)^{-1} a_i^* + (\sigma^1 + \sigma^2) b^* = \varphi(x_1 + x_2).$$

Очевидно, $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Каждое из отображений φ_i, ψ обратимо. Отображение φ_i^{-1} определено числом λ_{ii}^{-1}, отображение ψ^{-1} определено элементом $-a$. Непрерывность отображений φ_i, φ_i^{-1}, ψ, ψ^{-1} следует из непрерывной зависимости x от c_i, σ $(i \in I)$. Следовательно, каждое из отображений φ_i, ψ — топологический автоморфизм группы L. Отсюда следует, что $\varphi \in A(L)$.

Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством наборов чисел $\{\lambda_{ii}, a\}$, где $a \in A$, $\lambda_{ii} \in I_p$, $\lambda_{ii}^{-1} \in I_p$, $i \in I$, и множеством непрерывных автоморфизмов $\varphi \in A(L)$.

Подмножества T и T_i — подгруппы в $A(L)$, и $A(L)$ порождается подгруппами T и T_i $(i \in T)$. $T \lhd A(L)$. Очевидно, в $A(L)$ содержится подгруппа Г, равная прямому произведению всех подгрупп T_i, и $A(L)=\Gamma T$, $\Gamma \cap T=1$. $T_i \cong A(A_i) \cong A(I_p)$. В [2] показано, что группа $A(I_p)$ компактна. $T \cong B$. Отсюда следует компактность группы $A(G)$.

Заметим, что, вследствие [6, с. 41], $A(G)$ — полупрямое произведение групп T и Γ.

Рассмотрим группу $G = L \oplus Q$, где Q — циклическая группа порядка p с образующим элементом q.

Очевидно, L — открытая подгруппа в G. Рассмотрим окрестность $P(L)$ единицы группы $A(G)$, состоящую из всех автоморфизмов φ, для которых $\varphi(g) \in g + L$ для произвольного элемента g из G. Q — характеристическая подгруппа в G, следовательно, для всех φ из $P(L)$ $\varphi(Q)$ — тождественный автоморфизм. $\varphi(L) = L$ для всех $\varphi \in P(L)$.

Итак, $P(L)$ содержится в множестве N всех автоморфизмов, переводящих L в себя и оставляющих Q на месте. С другой стороны, если $\varphi \in N$, то $\varphi \in P(L)$. Отсюда следует: $P(L) = N \cong A(L)$, и $P(L)$ — открытая компактная подгруппа в $A(G)$. Следовательно, группа $A(G)$ локально компактна.

Определим для всех $i \in I$ отображение $\psi_i : G \to G$, где $\psi_i(a_i^*) = a_i^* + q$; $\psi_i(a_j^*) = a_j^*$ при $i \neq j \in I$; $\psi_i(b^*) = b^*$; $\psi_i(q) = q$. Пусть $\sigma_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \beta_j(\sigma_i) p^j$ — произвольное целое p-адическое число. $\varphi_i(\sigma_i a_i^*) = \beta_0(\sigma_i) q + \sigma_i a_i^*$.

Для произвольного элемента $x = \sum\limits_{j \in I} \sigma_j a_j^* + b + rq$ из G

$$\psi_i(x) = \sum_{j \in I} \sigma_j a_j^* + \beta_0(\sigma_i) q + b + rq = x + \beta_0(\sigma_i) q.$$

Пусть $x_1 = \sum\limits_{j \in I} \sigma_j^1 a_j^* + b^1 + r_1 q, \quad x_2 = \sum\limits_{j \in I} \sigma_j^2 a_j^* + b^2 + r_2 q,$

$$\psi_i(x_1) + \psi_i(x_2) = x_1 + x_2 + (\beta_0(\sigma_i^1) + \beta_0(\sigma_i^2)) q = \sum_{j \in I} \sigma_j^1 a_j^* + b^1 +$$

$$+ \sum_{i \in I} \sigma_j^2 a_j^* + b^2 + (r_1 + r_2 + \beta_0(\sigma_i^1) + \beta_0(\sigma_i^2)) q = \sum_{i \in I} \sigma_j^1 a_j^* +$$

$$+ \sum_{j \in I} (b_j^1)^{-1} \sigma_j^2 a_j^* + b^1 + b^2 + (\beta_0(\sigma_i^1) + \beta_0(\sigma_i^2)) q + (r_1 + r_2) q.$$

$$\psi_i(x_1 + x_2) = \psi_i\Big(\sum_{j \in I} \sigma_j^1 a_j^* + \sum_{j \in I} (b_j^1)^{-1} \sigma_j^2 a_j^* + b^1 + b^2 + (r_1 + r_2) q\Big) =$$

$$= \sum_{j \in I} \sigma_j^1 a_j^* + \sum_{j \in I} (b_j^1)^{-1} \sigma_j^2 a_j^* + b^1 + b^2 + (\beta_0(\sigma_i^1) + \beta_0(\sigma_i^2 (b_i^1)^{-1}) + r_1 + r_2) q.$$

Учитывая, что $\beta_0(\sigma_i^2 (b_i^1)^{-1}) = \beta_0(\sigma_i^2)$, получаем: $\psi_i(x_1) + \psi_i(x_2) = \psi_i(x_1 + x_2)$. $\psi_i(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Очевидно, отображение ψ_i обратимо для произвольного $i \in I$, и $\psi_i^{-1}(a_i^*) = a_i^* + (p-1) q$; $\psi_i^{-1}(a_j^*) = a_j^*$ при $j \neq i$, $j \in I$, $\psi_i^{-1}(b^*) = b^*$, $\psi_i^{-1}(q) = q$. Из непрерывности операций в K_0^p следует непрерывность отображения ψ_i, и ψ_i — топологический автоморфизм группы G для произвольного $i \in I$.

Очевидно, $\psi_i \psi_j^{-1} \notin P(L)$ при $i \neq j$, и все автоморфизмы ψ_i содержатся в различных классах смежности группы $A(G)$ по подгруппе $P(L)$; следовательно, фактор-пространство $A(G)/P(L)$ дискретно и бесконечно, и группа $A(G)$ некомпактна.

Автор выражает глубокую благодарность В. П. Платонову, привлекшему его внимание к рассмотренному в работе вопросу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Braconnier J. Sur les groupes topologiques localement compacts.— J. Math. Pures Appl., 1948, **27**, N 1, p. 1—85.
2. Мельников О. В. Группы автоморфизмов компактных вполне несвязных абелевых групп.— Докл. АН БССР, 1972, **16**, № 9, с. 777—780.
3. Smith Z. H. On products of profinite groups.—All. Z. Math., 1969, **13**, N 4, p. 680—688.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.— 520 с.
5. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел.— М.: Наука, 1972.— 496 с.
6. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.— М.: Наука, 1969.— 394 с.

Научно-исследовательский
и конструкторско-технологический институт
городского хозяйства МЖКХ УССР

Поступила в редакцию
9.XII.1977 г.