УДК 519.46

И. В. Протасов

О дуализмах топологических абелевых групп

Отображение φ решетки $\mathfrak{L}(G)$ замкнутых подгрупп топологической группы G на решетку $\mathfrak{L}$ (H) замкнутых подгрупп топологической группы H называется *дуализмом*, если $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ в том и только том случае, когда $B \subset A$. При этом группа H называется *дуальной* к G. Из теории двойственности Понтрягина следует, что любая локально компактная абелева группа G имеет дуальную — группу характеров $G^\wedge$. В классе дискретных абелевых групп дуальными, как показал Р. Бэр, обладают лишь периодические группы с конечными силовскими p-подгруппами. В работе [1] на основе подходящей топологизации решетки $\mathfrak{L}(G)$ получен некоторый аналог теоремы Бэра для локально компактных абелевых групп. В этой заметке продолжается изучение топологий в решетке замкнутых подгрупп и дуализмов, непрерывных относительно этих топологий.

Пусть задан класс $\mathfrak{A}$ топологических групп и для каждой группы $G \in \mathfrak{A}$ в решетке $\mathfrak{L}(G)$ определена некоторая топология τ. Таким образом, решетка $\mathfrak{L}(G)$ превращена в топологическое пространство $\mathfrak{L}_\tau(G)$. Дуализм φ назовем τ-дуализмом, если φ — гомеоморфное отображение $\mathfrak{L}_\tau(G)$ на $\mathfrak{L}_\tau(H)$. Группа H в этом случае называется τ-дуальной к G. В качестве τ рассмотрим E'-топологию, близкую к E-топологии из [1], и известную топологию Шаботи.

1. E'-топология и E'-дуализмы. Пусть в топологической группе G имеется полная система окрестностей единицы, состоящая из подгрупп. Положим $D_1(X) = \{H \in \mathfrak{L}(G) : H \subset X\}$, $D_2(Y) = \{H \in \mathfrak{L}(G) : H \cap Y \neq \varnothing\}$ и обозначим через Σ совокупность всевозможных множеств из $\mathfrak{L}(G)$ вида $D_1(KU) \cap \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$, где $V_1, \ldots, V_n$ — произвольные открытые множества из G, U — произвольная открытая подгруппа, K пробегает $\mathfrak{L}(G)$. Проверим, что Σ удовлетворяет условиям теоремы 3 из [2] и поэтому может быть принята в качестве полной системы окрестностей некоторой топологии в решетке $\mathfrak{L}(G)$, которую назовем E'-топологией.

а) Пусть Z_1, Z_2 — различные подгруппы из $\mathfrak{L}(G)$. Если $x \in Z_1$, $x \notin Z_2$, то найдется такая открытая подгруппа U, что $xU \cap Z_2 = \varnothing$. Значит, Z_1 не принадлежит окрестности $D_1(Z_2U)$ подгруппы Z_2. Если же $Z_1 \subset Z_2$, возьмем точку $y \in Z_2$, $y \notin Z_1$ и открытую подгруппу V так, чтобы $yV \cap Z_1 = \varnothing$, тогда $Z_1 \notin D_2(yV)$.

б) Пусть заданы множества $D_1(KU) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$ и $D_1(K'U') \cap \cap D_2(V_1') \cap \ldots \cap D_2(V_m')$ из Σ и подгруппа $Z \in \mathfrak{L}(G)$ принадлежит этим множествам. Положим $U'' = U \cap U'$. Поскольку U'' — подгруппа, $ZU'' \subset KU$, $ZU'' \subset K'U'$ и, значит, $Z \in D_1(ZU'') \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n) \cap D_2(V_1') \cap \ldots \cap D_2(V_m')$.

Непосредственно из определения ясно, что если G — дискретная или нульмерная компактная группа, то E'-топология эквивалентна E-топологии из [1], а, вообще говоря, E'-топология слабее E-топологии.

Лемма. *Если H — замкнутая подгруппа, N — замкнутый нормальный делитель топологической группы G, то*

а) *$\mathfrak{L}_{E'}(H)$ гомеоморфна интервалу $[\langle e \rangle, H]$ решетки $\mathfrak{L}_{E'}(G)$, e — единица группы;*

б) *интервал $[N, G]$ решетки $\mathfrak{L}_{E'}(G)$ гомеоморфен решетке $\mathfrak{L}_{E'}(G/N)$.*

Доказательство. Пусть f_1 — вложение группы H в G, f_2 — естественный гомоморфизм G на G/N. Обозначим через φ_1 индуцированное отображением f_1 отображение $\mathfrak{L}_{E'}(H)$ на интервал $[\langle e \rangle, H]$, φ_2 — индуцированное отображением f_2 отображение интервала $[N, G]$ на $\mathfrak{L}_{E'}(G/N)$. Из определения E'-топологии следует, что φ_1 — гомеоморфизм, φ_2 — непрерывное отображение. Покажем, что φ_2 открыто. Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — открытые множества из G, U — открытая подгруппа, $K \in [N, G]$. Если $P \in D_1(f_2(KU)) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$, $L \in [N, G]$ и $\varphi_2(L) = P$, то $L \subset \subset f_2^{-1}(f_2(KU)) = KUN = KU$ и $L \cap V_1 \neq \varnothing, \ldots, L \cap V_n \neq \varnothing$. Поэтому $\varphi_2(D_1(KU) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n) \cap [N, G]) = D_1(f_2(KU)) \cap D_2(f_2(V_1)) \cap \ldots \ldots \cap D_2(f_2(V_n))$. Так как множества $f_2(KU), f_2(V_1), \ldots, f_2(V_n)$ открыты и $f_2(KU) = f_2(K) f_2(U)$, φ_2 — открытое отображение.

В работе [1] d-группами названы абелевы группы, распадающиеся в тихоновское произведение своих силовских p-подгрупп, почти все из которых конечны, а каждая бесконечная изоморфна либо аддитивной группе кольца целых p-адических чисел J_p, либо аддитивной группе поля p-адических чисел Q_p, либо квазициклической группе $\{p^\infty\}$.

Теорема 1. *Локально компактная нульмерная абелева группа обладает E'-дуальной в классе локально компактных нульмерных абелевых групп тогда и только тогда, когда она является d-группой.*

Доказательство. Пусть φ — E'-дуализм группы G на G'. Предположим, что G дискретна. В решетке $\mathfrak{L}(G)$ E'-топология эквивалентна E-топологии, а в $\mathfrak{L}(G')$ E'-топология слабее E-топологии. Следовательно, φ^{-1} непрерывно отображает $\mathfrak{L}_E(G')$ на $\mathfrak{L}_E(G)$ и по лемме 4 из [1] $G = \{p_1^\infty\} \times \ldots \times \{p_n^\infty\} \times K$, где $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа, K конечна и порядок K не делится на $p_1, \ldots, p_n$. Случай произвольной локально компактной группы сводится к рассмотренному выше с помощью леммы и рассуждений доказательства теоремы 5 из [1]. Наоборот, пусть G — d-группа. Силовская подгруппа S_p из G E'-дуальна своей группе характеров $\hat{S_p}$. Рассмотрим группу G', равную тихоновскому произведению групп $\hat{S_p}$. Так как каждая замкнутая подгруппа из G распадается в тихоновское произведение своих проекций на сомножители и, то же самое, верно и для G', существует естественное продолжение E'-дуализмов решеток $\mathfrak{L}(S_p)$ и $\mathfrak{L}(\hat{S_p})$ до дуализма φ $\mathfrak{L}(G)$ на $\mathfrak{L}(G')$. Непрерывность φ и φ^{-1} вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Решетка $\mathfrak{L}_{E'}(G)$ нульмерной локально компактной группы G разложима в кардинальное произведение с тихоновской топологией решеток собственных подгрупп G_α в том и только том случае, когда G периодична (в топологическом смысле) и распадается в тихоновское произведение подгрупп G_α, причем $\pi(G_\alpha) \cap \pi(G_\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ ($\pi(G)$ — множество простых чисел p, для которых G содержит нетривиальный топологический p-элемент).*

Доказательство. Пусть G периодична, нульмерна и разложима в тихоновское произведение своих подгрупп G_α, причем $\pi(G_\alpha) \cap \pi(G_\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Существует естественный изоморфизм f между $\mathfrak{L}(G)$ и кардинальным произведением $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}(G_\alpha)$ [3]. Предбазу топологии решетки $\mathfrak{L}_{E'}(G)$ образуют множества $\overline{D}_1(K, U_\alpha) = \{Z \in \mathfrak{L}_{E'}(G) : pr_\alpha Z \subset pr_\alpha K U_\alpha\}$, $\overline{D}_2(V_\alpha) = \{Z \in \mathfrak{L}_{E'}(G) : pr_\alpha Z \cap V_\alpha \neq \varnothing\}$, где V_α пробегает все открытые множества из G_α, U_α — открытые подгруппы из G_α, а K — замкнутые подгруппы G; $pr_\alpha Z$ — проекция подгруппы Z на G_α. Предбазу тихоновской топологии $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$ образуют множества $\overline{\overline{D}}_1(K_\alpha U_\alpha) = \left\{H \in \prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha) : Pr_\alpha H \in D_1(K_\alpha U_\alpha)\right\}$, $\overline{\overline{D}}_2(V_\alpha) \doteq \left\{H \in \prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha) : Pr_\alpha H \in D_2(V_\alpha)\right\}$, где K_α пробегает все подгруппы из $\mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$, U_α, V_α — те же, что и выше; $Pr_\alpha H$ — проекция элемента H кардинального произведения на $\mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$. Так как $f(\overline{D}_1(K, U_\alpha)) = \overline{\overline{D}}_1(K_\alpha U_\alpha)$, $f(\overline{D}_2(V_\alpha)) = \overline{\overline{D}}_2(V_\alpha)$, то f — гомеоморфизм.

Наоборот, пусть $\mathfrak{L}_{E'}(G)$ разложима в кардинальное произведение с тихоновской топологией решеток подгрупп $\mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$. Тогда группа G с отмеченной в ней открытой компактной подгруппой U распадается в прямое произведение групп G_α, причем $\pi(G_\alpha) \cap \pi(G_\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ (см. [3]). Покажем, что почти все G_α содержатся в U. Предположим противное и выберем последовательность элементов $x_{\alpha_i} \in G_{\alpha_i}$, но $x_{\alpha_i} \notin U$. По условию имеется решеточный изоморфизм f $\mathfrak{L}_{E'}(G)$ на $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$, являющийся к тому же гомеоморфизмом. Из определения тихоновской топологии в $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$ вытекает, что последовательность $f(\overline{\langle x_{\alpha_i} \rangle})$ сходится к нулевому элементу решетки $\prod\limits_{\alpha \in J} \mathfrak{L}_{E'}(G_\alpha)$. Поскольку f — гомеоморфизм, последовательность $\overline{\langle x_{\alpha_i} \rangle}$ необходимо сходится к $\langle e \rangle$ в $\mathfrak{L}_{E'}(G)$. Последнее противоречит тому, что в окрестности $D_1(U)$ нет ни одного элемента указанной последовательности и теорема доказана.

2. S-топология и S-дуализмы. Если G локально компактна, то совокупность множеств $D_1(G \setminus K) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$, где K — произвольный компакт; $V_1, \ldots, V_n$ — открытые множества из G, можно принять в качестве полной системы окрестностей некоторой топологии в $\mathfrak{L}(G)$, которую назовем S-топологией. Нетрудно убедиться, что S-топология совпадает с известной топологией Шаботи [4, с. 304] и слабее E- и E'-топологии.

Наличие у локально компактной абелевой группы E- или E'-дуальной, как показывает теорема 5 из [1] и теорема 1,—довольно существенное ограничение на группу. Напротив, любая локально компактная абелева группа имеет S-дуальную. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть G — локально компактная абелева группа, φ — отображение $\mathfrak{L}(G)$ на $\mathfrak{L}(G^\wedge)$, ставящее в соответствие каждой подгруппе $H \in \mathfrak{L}(G)$ ее аннулятор в $G^\wedge$. Тогда φ — S-дуализм.*

Доказательство. Пусть $H \in \mathfrak{L}(G)$. Убедимся, что для компакта C из $G^\wedge$, $C \cap \varphi(H) = \varnothing$, найдется такая окрестность подгруппы H, что $\varphi(Z) \in D_1(G^\wedge \setminus C)$ для любой подгруппы Z из этой окрестности. Если $\omega \in C$, то $\omega \notin \varphi(H)$ и найдется $x_\omega \in H$, что $\omega(x_\omega) \neq e$. Выберем компактную окрестность $F(x_\omega)$ точки x_ω и открытое множество U_ω, содержащее ω, так, чтобы $\omega'(y) \neq e$ для всех $y \in F(x_\omega)$, $\omega' \in U_\omega$. Из покрытия компакта C множествами U_ω выберем конечное подпокрытие $U_{\omega_1}, \ldots, U_{\omega_n}$. Если $Z \in D_2(F(x_{\omega_1})) \cap \ldots \cap D_2(F(x_{\omega_n}))$, то $\varphi(Z) \in D_1(G \setminus C)$.

Действительно, пусть $\omega'' \in \varphi(Z) \cap C$. Для некоторого k $\omega'' \in U_{\omega_k}$. Значит, $\omega''(y) \neq e$ для любого $y \in F(x_{\omega_k})$. Однако $Z \cap F(x_{\omega_k}) \neq \varnothing$ и если $y_0 \in Z \cap F(x_{\omega_k})$, то $\omega''(y_0) = e$. Полученное противоречие показывает, что $\varphi(Z) \in D_1(G^\wedge \setminus C)$.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого открытого множества V из $G^\wedge$, $V \cap \varphi(H) \neq \varnothing$, найдется такая окрестность подгруппы H, что $\varphi(Z) \in D_2(V)$ для любой подгруппы Z из этой окрестности. Предположим вначале, что G компактна. Выберем элемент $\omega \in \varphi(H) \cap V$ и обозначим ядро характера ω через X_ω. Если $\langle \omega \rangle$ конечна, то X_ω открыта и $G \setminus X_\omega$ — компакт. Для любого $Z \in D_1(X_\omega)$ $\omega \in \varphi(Z)$ и, значит, $\varphi(Z) \in D_2(V)$. Если же $\langle \omega \rangle$ бесконечна, то G/X_ω — одномерный тор T. Обозначим через W окрестность единицы в G/X_ω, не содержащую нетривиальных подгрупп, и положим компакт D равным прообразу множества $G/X_\omega \setminus W$ при гомоморфизме G на G/X_ω. Ясно, что $X_\omega \cap D = \varnothing$ и для любой подгруппы $Z \in D_1(G \setminus D)$ $Z/Z \cap X_\omega$ содержится в W. Значит, $Z \subset X_\omega$, $\omega \in \varphi(Z)$ и $\varphi(Z) \in D_2(V)$. Итак, φ непрерывно. Из компактности $\mathfrak{L}_S(G)$ [4, с. 297] следует, что φ — S-дуализм. Если G дискретна, то $G^\wedge$ компактна, φ^{-1} — S-дуализм, и теорема доказана также для дискретных групп.

Пусть G — произвольная локально компактная группа, $\alpha \in \varphi(H) \cap V$. Выберем компакт K из G и окрестность U единицы из T так, чтобы окрестность $U' = \{\beta \in G^\wedge : \beta(x) \in \alpha(x) U$ для любого $x \in K\}$ содержалась в V. Наименьшая замкнутая подгруппа P, содержащая K, по теореме 51 из [2] равна $P_1 \times P_2 \times P_3$, где P_1 компактна, P_2 дискретна, а P_3 — векторная группа. K содержится в некотором компакте $K_1 \times K_2 \times K_3$, где $K_i \subset P_i$. Пусть α_i — сужение характера α на P_i, $V_i = \{\lambda \in P_i^\wedge : \lambda(y) \in \alpha_i(y) U_1$ для любого $y \in K_i\}$, где $U_1^3 \subset U$. Обозначим через φ_i естественный дуализм $\mathfrak{L}(P_i)$ на $\mathfrak{L}(P_i^\wedge)$. По доказанному выше φ_1, φ_2 — S-дуализмы. Нетрудно проверить, что φ_3 — также S-дуализм. Поэтому найдутся такие компакты $L_i \subset P_i$, что $\varphi_i(Z_i) \in D_2(V_i)$ для всех $Z_i \in D_1(P_i \setminus L_i)$. Предположим $Z \in D_1(G \setminus L)$, где $L = L_1 \times L_2 \times L_3$. Выберем $\beta_i \in \varphi(Z \cap P_i) \cap V_i$ и обозначим через β такой характер группы P, сужение которого на P_i совпадает с β_i. По теореме о продолжении характера найдется элемент $\beta' \in \varphi(Z)$, совпадающий с β на P. Очевидно, что $\beta' \in \varphi(Z) \cap V$. Значит, $\varphi(Z) \in D_2(V)$ и теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Протасов И. В. Топологические дуализмы локально компактных абелевых групп.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 5, с. 625—631.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.— 519 с.
3. Мухин Ю. Н. Локально компактные группы с дистрибутивной структурой замкнутых подгрупп.— Сиб. мат. журн., 1967, **8**, № 2, с. 366—375.
4. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления.— М.: Наука, 1970.— 320 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
2.XII.1977 г.