УДК 519.53

В. А. Романов

Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве

Пусть H — линейная оболочка ортонормированного базиса в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X. В [1, гл. 4], [2] подробно исследованы меры в пространстве X, квазиинвариантные по подпространству H. В данной работе исследуется вопрос о том, какие меры в пространстве X могут быть представлены как пределы в смысле сходимости по вариации последовательностей квазиинвариантных по H мер. Оказалось, что класс таких мер совпадает с классом H-непрерывных мер.

Под мерами понимаем конечные неотрицательные счетно-аддитивные функции множества, заданные на сигма-алгебре борелевских подмножеств пространства X.

Напомним, что мера m называется *квазиинвариантной* по подпространству H, если для любого h из H меры m и m_h (сдвиг m на вектор h) эквивалентны.

Замечание 1. Поскольку H — линейное подпространство, то для квазиинвариантности меры m по H достаточно потребовать, чтобы для любого h из H мера m_h была абсолютно непрерывной относительно меры m.

Меру m называем *непрерывной по направлению* h *из* H, если $\lim\limits_{t\to 0}\| m_{th}-m\|=0$ (здесь $\|\cdot\|$ означает вариацию). Меру называем *H-непрерывной*, если она непрерывна по любому направлению из H. Понятие H-непрерывной меры введено в работе [3].

Условия H-непрерывности и квазиинвариантности по H — естественные условия согласованности между мерой и линейной структурой.

Теорема 1. *Если m — мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X, квазиинвариантная по подпространству H, то она H-непрерывна.*

Доказательство. Пусть h — произвольный вектор из H, E_1 — линейное подпространство, порожденное этим вектором, E_2 — его ортогональное дополнение в X, m_i — проекция меры m на подпространство E_i ($i=1,2$). Из теоремы 1 работы [1, § 20] вытекает, что мера m_1 абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на E_1. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to 0}\|(m_1)_{th}-m_1\|=0$. Учитывая также равенство $(m_1\times m_2)_{th}=(m_1)_{th}\times m_2$, получаем, что мера $m_1\times m_2$ непрерывна по направлению h. Согласно той же теореме 1 работы [1, § 20], мера m абсолютно непрерывна относительно меры

$m_1 \times m_2$, а поэтому из теоремы 1 работы [4] вытекает, что она тоже непрерывна по направлению h. Следовательно, мера m H-непрерывна, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество H-непрерывных мер содержится в множестве квазиинвариантных по H мер.

Предложение 1. *Класс H-непрерывных мер замкнут относительно операции предельного перехода по вариации.*

Доказательство. Пусть для меры m найдется такая последовательность H-непрерывных мер m_n, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| m - m_n \| = 0$. Пусть h—произвольный вектор из H и $\varepsilon > 0$. Существует такое натурал ное число n, что $\| m - m_n \| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку мера m_n H-непрерывна, найдется такое $\delta > 0$, для которого при $|t| < \delta$ $\| (m_n)_{th} - m_n \| < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, при $|t| < \delta$

$$\| m_{th} - m \| \leqslant \| m_{th} - (m_n)_{th} \| + \| (m_n)_{th} - m_n \| + \| m_n - m \| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что мера m H-непрерывна. Предложение доказано.

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Если мера m — предел в смысле сходимости по вариации некоторой последовательности квазиинвариантных по H мер, то она H-непрерывна.*

Следующая теорема утверждает, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы мера m в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X была пределом в смысле сходимости по вариации некоторой последовательности квазиинвариантных по подпространству H мер, необходимо и достаточно, чтобы она была H-непрерывной.*

Доказательство. Необходимость условия H-непрерывности уже доказана. Докажем достаточность этого условия.

Пусть мера m H-непрерывна. Можно считать, что эта мера нормированная.

Поскольку H — линейная оболочка ортонормированного базиса, H может быть представлено в виде объединения возрастающей цепочки конечномерных линейных подпространств E_k, где $\dim E_k = k$. При каждом k мера m непрерывна по всем направлениям конечномерного пространства E_k, поэтому $\| m_y - m \| \to 0$ при $y \in E_k$, $\| y \|_k \to 0$, где $\| y \|_k$—норма y в пространстве E_k.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Найдутся такие $\delta_k > 0$, для которых при $y \in E_k$, $\| y \|_k < \delta_k$ выполняется неравенство

$$\| m_y - m \| < \varepsilon. \tag{1}$$

В пространстве E_k существует такая нормированная мера μ_k, эквивалентная лебеговой мере в этом пространстве и для которой

$$\mu_k (E_k \setminus U_k) < \varepsilon, \tag{2}$$

где U_k — открытый шар в пространстве E_k с центром в нуле радиуса δ_k.

На борелевской сигма-алгебре в X рассмотрим следующую функцию множества:

$$\mu (B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int\limits_{E_k} m (B + y) \, d\mu_k (y).$$

Из теоремы Никодима (см. [5, с. 177]) вытекает, что функция множества μ — мера. Отметим, что $\mu (X) = 1$.

Предположим, что $\mu(B+h)>0$, где B—борелевское множество, h—некоторый вектор из H. Тогда из построения меры μ следует, что при некотором натуральном k $\int\limits_{E_k} m(B+h+y)\,d\mu_k(y)>0$. Поэтому найдется такой вектор y_1 из E_k, для которого $m(B+h+y_1)>0$. Поскольку $h\in H$, найдется такое натуральное число p, для которого $h\in E_p$. Можно считать, что $p\geqslant k$. Тогда $m(B+y_0)>0$, где $y_0=h+y_1\in E_p$.

Так как мера m непрерывна по всем направлениям конечномерного пространства E_p, отсюда вытекает, что существует такое $\delta>0$, для которого при $y\in E_p$, $\|y-y_0\|_p<\delta$, выполняется неравенство $m(B+y)>\frac{1}{2}m(B+y_0)>0$.

Следовательно, величина $m(B+y)$, рассматриваемая как функция аргумента y, принимает положительные значения на множестве положительной лебеговой меры в E_p. Поскольку мера μ_p эквивалентна мере Лебега в пространстве E_p, отсюда следует, что $\int\limits_{E_p} m(B+y)\,d\mu_p(y)>0$, а поэтому и $\mu(B)>0$.

Итак, из неравенства $\mu(B+h)>0$, где $h\in H$, вытекает, что $\mu(B)>0$. Следовательно, мера μ квазиинвариантна по H.

Из свойств вариации вытекает, что

$$\|\mu-m\|\leqslant 2\sup|(\mu-m)(B)|, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всем борелевским подмножествам B пространства X (см. [5, с. 111]).

Для каждого такого множества B

$$(\mu-m)(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int\limits_{E_k}(m(B+y)-m(B))\,d\mu_k(y).$$

Следовательно, справедливо неравенство:

$$|(\mu-m)(B)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left\{\int\limits_{E_k\setminus U_k}|m(B+y)-m(B)|\,d\mu_k(y)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{U_k}|m(B+y)-m(B)|\,d\mu_k(y)\right\}.$$

Подынтегральная функция в первом слагаемом, стоящем в фигурных скобках, не превосходит 2. Поэтому из (2) вытекает, что это слагаемое не превосходит 2ε. Учитывая (1), получаем, что второе слагаемое не превосходит ε. Следовательно, $|(\mu-m)(B)|\leqslant 3\varepsilon$. Отсюда и из (3) вытекает, что $\|\mu-m\|\leqslant 6\varepsilon$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$ построена такая квазиинвариантная по H мера μ, для которой $\|\mu-m\|\leqslant 6\varepsilon$. Поэтому существует такая последовательность квазиинвариантных по H мер m_n, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\|m_n-m\|=0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1975.— 230 с.
2. Скороход А. В. О допустимых сдвигах мер в гильбертовом пространстве.— Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, вып. 4, с. 577—598.
3. Романов В. А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах.— ДАН СССР, 1976, **227**, № 3, с. 569—570.

4. Р о м а н о в В. А. Об H-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве.— Вестник Московск. ун-та, мат., мех., 1977, № 1, с. 81—85.
5. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж. Линейные операторы. Общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.

Гомельский
государственный университет

Поступила в редакцию
13.XII.1977 г.