УДК 511.6+517.56

А. В. Крытов

О дефектах целых кривых конечного нижнего порядка

1. Введение. В данной работе используем обозначения теории p-мерных целых кривых [1 — 4]. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что компоненты p-мерных ($p \geqslant 2$) целых кривых линейно независимы и имеют лишь конечное число общих нулей, а всякий p-мерный вектор $\vec{a}$ таков, что $\vec{a} \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Кроме стандартных обозначений теории целых кривых [3, 4] для целой кривой $\vec{G}(z)$ и вектора $\vec{a} \in C^p$ полагаем

$$\mu(r, \vec{a}, \vec{G}) = \min_{|z|=r} \ln \frac{\|\vec{G}(z)\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(z) \cdot \vec{a})|}.$$

Последовательностью пиков Полиа [5] целой кривой $\vec{G}(z)$ называем последовательность пиков Полиа ее неванлинновской характеристики $T(r, \vec{G})$.

Пусть $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая конечного нижнего порядка λ, $\vec{a} \in C^p$ — произвольный вектор. Для каждой положительной неограниченно возрастающей к $+\infty$ функции $\Lambda(r) = o(T(r, \vec{G}))$, $r \to \infty$, определяем множества $E_\Lambda(r, \vec{a}, \vec{G}) \subset (-\pi, \pi]$ посредством формулы

$$E_\Lambda(r, \vec{a}, \vec{G}) = \left\{\theta : \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta}) \cdot \vec{a})|} > e^{\Lambda(r)}\right\}.$$

Зафиксируем последовательность пиков Полиа $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ порядка λ целой кривой $\vec{G}(z)$. Полагаем (см. [5])

$$\sigma_\Lambda(\vec{a}) = \sigma_\Lambda(\vec{a}, \vec{G}) = \varliminf_{m \to \infty} \operatorname{mes} E_\Lambda(r_m, \vec{a}, \vec{G}), \quad \sigma(\vec{a}) = \sigma(\vec{a}, \vec{G}) = \inf_\Lambda \sigma_\Lambda(\vec{a}, \vec{G}).$$

Обозначаем $\Phi(\zeta) = \Phi(\zeta, \vec{a}, \vec{G}) = \dfrac{\|\vec{G}(\zeta)\| \cdot \|\vec{a}\|}{(\vec{G}(\zeta) \cdot \vec{a})}$.

Для произвольного вектора $\vec{a} \in C^p$ полагаем (см. [6, 7]) $m^*(z) = m^*(z, \vec{a}, \vec{G}) = \sup_E \frac{1}{2\pi} \int_E \ln|\Phi(re^{i\omega})|\, d\omega$ ($z = re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), где супремум берется по всем измеримым множествам $E \subset (-\pi, \pi]$ лебеговой меры 2θ, $T^*(z) = T^*(z, \vec{a}, \vec{G}) = m^*(z, \vec{a}, \vec{G}) + N(r, \vec{a}, \vec{G})$.

Функция T^* определена на множестве $H_1 = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ z \neq 0\}$.

Из определения этой функции следует, что для любого r, $0 < r < \infty$, и любого вектора $\vec{a} \in C^p$

$$\sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} T^*(re^{i\theta}) = T(r, \vec{G}), \tag{1}$$

$$T^*(r) = N(r, \vec{a}, \vec{G}). \tag{2}$$

2. Формулировки полученных результатов. Некоторые результаты для целых кривых, близкие к нашим, получены в работе [8].

Утверждения для мероморфных функций, аналогичные теоремам этого пункта, получены в работах [5—7, 9—11].

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Функция $T^*(z)$ субгармонична в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *и непрерывна в* H_1.

Теорема 2. *Для р-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ нижнего порядка $0 < \lambda < \infty$ и любого вектора $\vec{a} \in C^p$ справедливо соотношение*

$$\sigma(\vec{a}) \geqslant \min\left\{2\pi, \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}}\right\}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $\vec{G}(z)$ — р-мерная целая кривая нижнего порядка $0 < \lambda < \infty$, q — целое число такое, что $q \geqslant 2\lambda$. Если существует вектор $\vec{a} \in C^p$, для которого*

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) \geqslant 1 - \cos\frac{\pi\lambda}{q}, \tag{4}$$

то

$$\sigma(\vec{a}) \geqslant 2\pi/q. \tag{5}$$

Из теоремы 3 легко выводим три следствия, обобщающие на целые кривые следствия 2.1—2.3 теоремы 2 работы [5]. Не будем формулировать и доказывать здесь эти следствия.

Теорема 4. *Пусть $\vec{G}(z)$ — р-мерная целая кривая нижнего порядка $0 < \lambda \leqslant 0{,}5$, A — произвольная фиксированная допустимая система векторов. Имеют место такие утверждения:*

1. *Если для $p-1$ вектора $\vec{a} \in A$ выполняется неравенство*

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) \geqslant 1 - \cos\pi\lambda, \tag{6}$$

то все остальные дефекты равны нулю.

2. *Если неравенство* (6) *выполняется для k, $0 \leqslant k < p-1$, векторов $\{\vec{a}_j\}_{j=1}^k = A_k \subset A$, то*

$$\sum_{\vec{a} \in A \setminus A_k} \delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant (p-k-1)(1-\cos\pi\lambda), \tag{7}$$

причем знак равенства здесь может быть тогда и только тогда, когда $p-k-1$ дефектов равны $1-\cos\pi\lambda$, а остальные — равны нулю. *

* Случай $k = 0$ означает, что неравенство (6) не выполняется ни для одного вектора $\vec{a} \in A$.

Теорема 5. *Если $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая нижнего порядка $\lambda < 0{,}5$ и $\vec{a}$ — произвольный p-мерный вектор, то для величины $\alpha(\vec{a}, \vec{G}) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}$ справедливо соотношение $\alpha(\vec{a}, \vec{G}) \geqslant \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} (\delta(\vec{a}, \vec{G}) - 1 + \cos \pi\lambda)$.*

Следствие. *Если p-мерная целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет нижний порядок $\lambda < 0{,}5$ и для некоторого вектора $\vec{a} \in C^p$ $\delta(\vec{a}, \vec{G}) > 1 - \cos \pi\lambda$, то существует последовательность окружностей $\{|z| = r_k\}$, $r_k \to \infty$, на которой $\frac{\| \vec{G}(z) \| \cdot \| \vec{a} \|}{|(\vec{G}(z) \cdot \vec{a})|} \to \infty$ равномерно относительно $\arg z$.*

3. Доказательства полученных результатов. Доказательство теоремы 1 для введенной в п. 1 функции $\Phi(\zeta)$ проводим так же, как и для мероморфных функций, т. е. методом работы [7]. При этом роль полюсов мероморфной функции $f(z)$ играют нули скалярного произведения $(\vec{G}(z) \cdot \vec{a})$. По-иному оценивается лишь $\ln |\Phi(\zeta)|$. В связи с этим заметим следующее. Из определения функции $\Phi(\zeta)$ следует, что

$$\ln |\Phi(\zeta)| = \ln(\| \vec{G}(\zeta) \| \cdot \| \vec{a} \|) + \ln |\Phi_1(\zeta)|, \tag{8}$$

где $\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{(\vec{G}(\zeta) \cdot \vec{a})}$. Так как $\Phi_1(\zeta)$ — обычная мероморфная функция, то для нее справедлива теорема 1 из работы [7]. Поэтому для функции $\Phi(\zeta)$ оценка (3.15) работы [7] получается из формулы (8) и неравенства ($\rho > 0$) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln \| \vec{G}(z_1 + \rho e^{i\psi}) \| \, d\psi \geqslant \ln \| \vec{G}(z_1) \|$, справедливого для субгармонической функции $\ln \| \vec{G}(z) \|$ (см. [4]).

Для доказательства теоремы 2 рассматриваем два случая

$$\frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}} < 2\pi \quad \text{и} \quad \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}} \geqslant 2\pi. \tag{9}$$

В первом случае нужно доказать, что

$$\sigma(\vec{a}) \geqslant \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}}, \tag{10}$$

а во втором — что

$$\sigma(\vec{a}) \geqslant 2\pi. \tag{11}$$

Заметим, что в силу очевидного соотношения $\sigma(\vec{a}) \leqslant 2\pi$ и формулы (11) в случае (9) $\sigma(\vec{a}) = 2\pi$.

Для вывода неравенства (10) следует воспользоваться теоремой 1 и доказательством соотношения (1.4) (см. [7, с. 429—434]).

Наметим ход доказательства неравенства (10). Полагаем

$$\nu = \frac{2}{\pi\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}}. \tag{12}$$

Для субгармонической (см. теорему 1) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функции $v(z) = T^*(z^\nu)$ ($z = re^{i\theta}$, $0 < r \leqslant \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), $v(0) = T^*(0) = 0$, выполняется неравенство

$$v(re^{i\theta}) \leqslant \int_{-R}^{R} v(t)\,A(t, r, \theta, R)\,dt + \int_{0}^{\pi} v(Re^{i\varphi})\,B(\varphi, r, \theta, R)\,d\varphi,$$

где A и B — ядра (см. [7, с. 430]).

Применяем оценки $B(\varphi, r, \theta, R) < 32\,\frac{r}{R}$ $(0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < r < 0{,}5R)$ и $A(t, r, \theta, R) \leqslant P(t, r, \pi - \theta)$, $A(-t, r, \theta, R) \leqslant P(t, r, \theta)$, где $P(t, r, \theta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{r \sin\theta}{t^2 + 2tr\cos\theta + r^2}$.

Учитывая свойства (1) и (2) функции T^*, получаем

$$v(re^{i\theta}) \leqslant \int_{0}^{R} N(t^{\nu}, \vec{a}, \vec{G})\,P(t, r, \pi - \theta)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{R} T(t^{\nu}, \vec{G})\,P(t, r, \theta)\,dt + 32\,\frac{r}{R}\,T(R^{\nu}, \vec{G})\ (0 < \theta < \pi,\ 0 < r < 0{,}5R). \quad (13)$$

Пусть $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность пиков Полиа порядка λ целой кривой $\vec{G}(z)$ и $\{r''_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность, фигурирующая в определении последовательности пиков Полиа (см. [7, с. 418]) такая, что $\frac{r''_m}{r_m} \to \infty$ $(m \to \infty)$.

Обозначаем $s_m = r_m^{\frac{1}{\nu}}$, $s''_m = (r''_m)^{\frac{1}{\nu}}$.

Справедливы соотношения

$$\int_{0}^{s''_m} N(t^{\nu}, \vec{a}, \vec{G})\,P(t, s_m, \pi - \theta)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \delta(\vec{a}, \vec{G}))\,T(r_m, \vec{G})\left[\frac{\sin(\pi - \theta)\,\nu\lambda}{\sin \pi\nu\lambda} + o(1)\right], \quad (14)$$

$$\int_{0}^{s''_m} T(t^{\nu}, \vec{G})\,P(t, s_m, \theta)\,dt \leqslant T(r_m, \vec{G})\left[\frac{\sin\theta\nu\lambda}{\sin\pi\nu\lambda} + o(1)\right] \quad (m \to \infty,\ 0 < \theta < \pi), \quad (15)$$

где $o(1)$ не зависит от θ,

$$\frac{s_m}{s''_m}\,T((s''_m)^{\nu}, \vec{G}) = o(T(r_m, \vec{G})), \quad m \to \infty. \quad (16)$$

Полагая в (13) $r = s_m$, $R = s''_m$ и принимая во внимание соотношения (14) — (16), находим $(m \to \infty,\ 0 < \theta < \pi)$

$$v(s_m e^{i\theta}) \leqslant T(r_m, \vec{G})\left[\frac{\sin\theta\nu\lambda + (1 - \delta(\vec{a}, \vec{G}))\sin(\pi - \theta)\,\nu\lambda}{\sin\pi\nu\lambda} + o(1)\right]. \quad (17)$$

Из определения ν имеем $1 - \delta(\vec{a}, \vec{G}) = \cos\pi\nu\lambda$. Неравенство (17) запишем в виде

$$v(s_m e^{i\theta}) \leqslant T(r_m, \vec{G})\,[\cos(\pi - \theta)\,\nu\lambda + \alpha_m] \quad (m = 1, 2, \ldots;\ \ 0 < \theta < \pi),$$

где $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$. Следуя далее [7, с. 433, 434], приходим к соотношению (10).

Неравенство (11) получается с помощью предыдущих рассуждений, проведенных при $\nu = 1$ (см. (12)) и $\lambda \leqslant 0{,}5$, и формулы (9), примененной в соотношении (17).

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству формулы (10). Заметим лишь, что нужно выбрать $\nu = 1/q$ (см. (12)), а в соотношении (17) использовать неравенство (4). Соотношение (4.16) из [7, с. 433] приводит к искомому неравенству (5).

Докажем теорему 4. Предварительно сформулируем утверждение, которое можно легко получить из лемм 2.1.1 и 2.1.2 работы [12]:

для p-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ и произвольной фиксированной допустимой системы векторов A

$$\sum_{\vec{a}\in A} \sigma(\vec{a}) \leqslant 2\pi(p-1). \tag{18}$$

Утверждение 1 теоремы 4 получаем из теоремы 3 при $q = 1$ и формулы (18).

Для доказательства утверждения 2 заметим, что из неравенств ($0 \leqslant k < p-1$) $\delta(\vec{a}_j, \vec{G}) \geqslant 1 - \cos\pi\lambda$ ($j = 1, 2, \ldots, k$) в силу теоремы 3 следуют соотношения

$$\sigma(\vec{a}_j) \geqslant 2\pi \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{19}$$

Из (18), (19) и (3) находим

$$\sum_{\vec{a}\in A\setminus A_k} \frac{4}{\lambda} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\vec{a}, \vec{G})}{2}} \leqslant 2\pi(p-k-1).$$

Выберем $H = p-k-1$ в лемме 1 [9]. Повторяя рассуждения, проведенные А. Эдреем при доказательстве утверждения 1 теоремы 1 (см. [9, с. 443, 444]), приходим к доказываемому соотношению (7). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5 проводится методом работы [10].

4. Точность полученных результатов. Точность теорем 2, 3 и 4 характеризуют следующие утверждения.

Теорема 6. *Для любых наперед заданных чисел p ($p \geqslant 2$), λ ($0 < \lambda < \infty$) и δ ($0 < \delta \leqslant 1$) можно указать p-мерную целую кривую $\vec{G}^{(1)}(z)$ нижнего порядка λ и вектор $\vec{a}^{(1)} \in C^p$ такие, что $\delta(\vec{a}^{(1)}, \vec{C}^{(1)}) = \delta, \sigma(\vec{a}^{(1)}, \vec{G}^{(1)}) = \min\left\{2\pi, \frac{4}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta}{2}}\right\}$.*

Теорема 7. *Для любых наперед заданных чисел p ($p \geqslant 2$) и λ ($0 < \lambda < \infty$) можно указать p-мерную целую кривую $\vec{G}^{(2)}(z)$ нижнего порядка λ, вектор $\vec{a}^{(2)} \in C^p$ и целое число $q \geqslant 2\lambda$ такие, что*

$$\delta(\vec{a}^{(2)}, \vec{G}^{(2)}) = 1 - \cos\frac{\pi\lambda}{q}, \quad \sigma(\vec{a}^{(2)}, \vec{G}^{(2)}) = \frac{2\pi}{q}.$$

Теорема 8. *Для любых наперед заданных чисел p ($p \geqslant 2$), λ ($0 < \lambda < 0{,}5$) и ε ($0 < \varepsilon < 1 - \cos\pi\lambda$) существуют p-мерная целая кривая $\vec{G}^{(3)}(z)$ нижнего порядка λ, допустимая система векторов $A^{(1)} = \{\vec{a}_j\}_{j=1}^{p}$ и величина $C(\varepsilon)$ ($C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) такие, что*

$$\delta(\vec{a}_j, \vec{G}^{(3)}) = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant p-2),$$

$$\delta(\vec{a}_{p-1}, \vec{G}^{(3)}) = 1 - \cos\pi\lambda - \varepsilon, \quad \delta(\vec{a}_p, \vec{G}^{(3)}) = C(\varepsilon).$$

Теорема 9. *Для любых наперед заданных чисел p ($p \geqslant 2$), k ($0 \leqslant k \leqslant p-2$) и λ ($0 < \lambda \leqslant 0{,}5$) существуют p-мерная целая кривая $\vec{G}^{(4)}(z)$ нижнего порядка λ и допустимая система векторов $A^{(2)} = \{\vec{a}_j\}$ такие, что*

$$\delta(\vec{a}_j, \vec{G}^{(4)}) > 1 - \cos \pi\lambda \quad (j \leqslant k),$$

$$\delta(\vec{a}_j, \vec{G}^{(4)}) = 1 - \cos \pi\lambda \ (k+1 \leqslant j \leqslant p-1), \quad \delta(\vec{a}_j, \vec{G}^{(4)}) = 0 \ (j \geqslant p).$$

Доказательства теорем 6—8 опираются на примеры для мероморфных функций (см. [7, с. 419, 420]; [13, теорема 2.2.2]).

Для доказательства теоремы 9 используем целую функцию [14, с. 243, 247] $h(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^{1/\lambda}}\right)$. Определим числа $\delta_j > 0$ ($j = 1, 2, \ldots, p-1$) соотношениями

$$1 > \delta_j > 1 - \cos \pi\lambda \ (j \leqslant k), \quad 1 > \delta_j = 1 - \cos \pi\lambda \ (k+1 \leqslant j \leqslant p-1).$$

Целая кривая $G^{(4)}(z) = \{g_j(z)\}_{j=1}^{p}$ имеет компоненты $g_j(z) = h\left((1-\delta_j)^{\frac{1}{\lambda}} z\right)$ ($j = 1, 2, \ldots, p-1$), $g_p(z) = h(z)$. В случае $\delta_j = 1$ положим $g_j(z) = z^j$. Допустимая система векторов $A^{(2)}$ такова: $\vec{a}_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где 1 стоит на k-м месте.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. П. Петренко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahlfors L. The theory of meromorphic curves.— Acta Soc. Sci. Fenn., 1941, **3**, N 4, p. 1—31.
2. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves.— Princeton, 1943.— 531 p.
3. Cartan H. Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données.— Mathematica, 1933, **7**, p. 5—31.
4. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн.: Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960, с. 263—300.
5. Edrei A. Sums of deficiencies of meromorphic functions.— J. anal. math., 1965, **14**, p. 79—107.
6. Baernstein A. Proof of Edrei's spread conjecture.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, **78**, № 2, p. 277—278.
7. Baernstein A. Proof of Edrei's spread conjecture.— Proc. London Math. Soc. (3), 1973, **26**, № 3, p. 418—434.
8. Петренко В. П., Хуссайн М. О дефектах целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$ — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1975, вып. **24**, с. 128—138.
9. Edrei A. Solution of the deficiency problem for functions of small lower order.— Proc. London Math. Soc. (3), 1973, **26**, N 3, p. 435—445.
10. Fuchs W. H. J. A theorem on min log $|f(z)|/T(r, f)$.— London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1974, **12**, p. 69—72.
11. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.
12. Крутинь В. И. Исследование роста и распределения значений целых и аналитических кривых.— Автореф. канд. дисс., Харьков, 1974.— 20 с.
13. Ламзина Т. Б. Исследование множеств приближения для мероморфных функций и целых кривых.— Автореф. канд. дисс., Харьков, 1975.— 29 с.
14. Edrei A., Fuchs W. H. J. The deficiencies of meromorphic functions of order less than one.— Duke Math. J., 1960, **27**, N 2, p. 233—249.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
9.I.1978 г.