УДК 517.522.5

И. Ю. Каниовская

Приближение функций класса H_ω модифицированными полиномами Рогозинского

В работе [1] получено асимптотическое значение

$$E(H_\omega, R_n) = \sup_{f \in H_\omega} \| f(x) - R_n(f; x) \|_C,$$

где H_ω — класс 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $|f(t) - f(t')| \leqslant \omega(|t - t'|)$, а $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, $R_n(f; x)$ — полиномы Рогозинского, определяющиеся по формулам

$$R_n(f; x) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(f; x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(f; x - \frac{\pi}{2n}\right)\right],$$

где $S_n(f; x)$ — частные суммы Фурье функции $f(x)$.

В данной статье будет изучаться поведение величин $E(H_\omega; \tilde{R}_n)$, где

$$\tilde{R}_n(f; t) = \frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}}\left[S_n\left(f; t - \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(f; t + \frac{\pi}{2n}\right)\right] - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}\left[S_n\left(f; t - \frac{3\pi}{2n}\right) + S_n\left(t + \frac{3\pi}{2n}\right)\right]. \quad (1)$$

Назовем (1) модифицированными полиномами Рогозинского. Исходя из того, что $S_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t - x)\,dt$, где $D_n(t)$ — ядро Дирихле, получаем

$$\tilde{R}_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{n}}\left[D_n\left(t - \frac{\pi}{2n} - x\right) + D_n\left(t + \frac{\pi}{2n} - x\right)\right] - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}\left[D_n\left(t - \frac{3\pi}{2n} - x\right) + D_n\left(t + \frac{3\pi}{2n} - x\right)\right]\right\} dt.$$

Ядро вида

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{2n}}{2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}}\left[D_n\left(t - \frac{\pi}{2n}\right) + D_n\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}\left[D_n\left(t-\frac{3\pi}{2n}\right)+D_n\left(t+\frac{3\pi}{2n}\right)\right]=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\frac{\cos nt}{\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos t-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)} \qquad (1')$$

назовем модифицированным ядром Рогозинского. Эти ядра рассматривались в [2]. Достоинства таких ядер состоят в том, что, с одной стороны, они знакопеременные, а с другой — сходны с ядрами Джексона

$$J_n(t)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$$

в том смысле, что при $t\to 0$ знаменатель (1′) стремится к 0 как величина порядка t^4.

Установим сначала теорему, в которой доказана выпуклость нулей функции

$$3\left[\operatorname{si}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\operatorname{si}\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right),$$

где $\operatorname{si} t$ — интегральный синус.

Теорема 1. *Для функции*

$$I(t)=-6\pi^3\int_t^\infty\frac{\cos\xi}{\left(\xi^2-\frac{9\pi^2}{4}\right)\left(\xi^2-\frac{\pi^2}{4}\right)}d\xi=$$

$$=3\left[\operatorname{si}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\operatorname{si}\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right),\quad t\geqslant 0,$$

справедливы следующие факты:

1) *на каждом промежутке* $\left[\frac{\pi}{2}(2k-1),\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]$, $k=3,4,\ldots$, $I(t)$ *имеет единственный простой нуль* t_k;

2) *при* $k\geqslant 7$ *справедлива формула*

$$t_k=\pi k+\frac{k\,[4\pi k^3-4k^2(3\pi-2)-5k(4-\pi)-15\pi]}{\pi^2(k-2)\left(k^2-\frac{9}{4}\right)\left(k^2-\frac{1}{4}\right)}+$$

$$+\frac{4\pi^2k^6(k-2)}{\left(k^2-\frac{9}{4}\right)^2\left(k^2-\frac{1}{4}\right)[\pi^2(k-3)^2-1]}-\frac{0{,}7}{k^3}+r(k),\quad |r(k)|\leqslant\frac{8{,}361}{k^5};$$

3) *последовательность* $\{t_k\}$ *выпукла, т. е. при всех* $k=3,4,5,\ldots$ $t_{k-1}-2t_k+t_{k+1}>0$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны проведенным в работе [3] при доказательстве теоремы 1. Поэтому рассмотрим лишь отличающие их моменты.

Для доказательства 1) необходимо показать, что

$$\operatorname{sign} I(\pi k)=-\operatorname{sign} I\left[\left(k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]. \qquad (2)$$

Действительно, поскольку $I'(t) = \dfrac{6\pi^3 \cos t}{\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\left(t^2 - \frac{9\pi^2}{4}\right)}$ обращается в 0 в точках $t_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)$, $k = 3, 4, 5, \ldots$, то на каждом из отрезков $\left[\frac{\pi}{2}(2k-1), \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]$ эта функция монотонна. Поэтому справедливость равенства (2) повлечет за собой справедливость п. 1) доказываемой теоремы.

В силу п. 1) окажется, что $t_k = \pi k + \alpha(k)$, где $0 < \alpha(k) < \frac{\pi}{6}$, $k = 2, 3, \ldots$

Доказывая 2) аналогично доказательству п. 2) теоремы 1 в работе [3], получаем

$$\alpha(k) = \frac{k\left[4\pi k^3 - 4k^2(3\pi - 2) - 5k(4-\pi) - 15\pi\right]}{\pi^2(k-2)\left(k^2 - \frac{9}{4}\right)\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)} +$$

$$+ \frac{4\pi^2 k^6(k-2)}{\left(k^2 - \frac{9}{4}\right)^2\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)\left[\pi^2(k-3)^2 - 1\right]} - \frac{0{,}7}{k^3} + r(k),$$

где $|r(k)| \leqslant \frac{8{,}361}{k^5}$; $k \geqslant 7$.

Для доказательства п. 3) теоремы необходимо учесть равенство

$$\Delta_2\alpha(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha(k-1) - 2\alpha(k) + \alpha(k+1) = \alpha''(k-1+\xi_k),$$

где $\xi_k \in (0, 2)$. Тогда, поскольку $\Delta_2 t_k \overset{\mathrm{df}}{=} t_{k-1} - 2t_k + t_{k+1} = \Delta_2\alpha(k)$, то из вида функции $\alpha''(k)$ и того, что $|r(k)| \leqslant \frac{8{,}361}{k^5}$ следует неравенство $\Delta_2 t_k > 0$, начиная с номера $k = 7$.

Справедливость неравенства в случае $k = 3, 4, 5, 6$ легко проверить непосредственно, если учесть численные значения корней t_k, $k = \overline{2,8}$, вычисленные на ЭЦВМ «Мир» с точностью $3 \cdot 10^{-4}$:

$$t_2 = 6{,}82310, \quad t_3 = 9{,}84910, \quad t_4 = 12{,}89380, \quad t_5 = 15{,}94868,$$

$$t_6 = 19{,}15039, \quad t_7 = 22{,}37263, \quad t_8 = 25{,}61381.$$

Этим теорема 1 полностью доказана.

Перейдем к изучению величины $E(H_\omega, \tilde{R}_n) = \sup\limits_{f \in H_\omega} \| f(x) - \tilde{R}_n(f; x)\|_C$.

Теорема 2. *При всех натуральных n имеет место неравенство*

$$E(H_\omega; \tilde{R}_n) < 3\omega\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Если модуль непрерывности $\omega(t)$ выпуклый и для него выполняется условие

$$\sum_{\nu=0}^{s} (-1)^\nu \omega\left(\frac{t_{\nu+1} - t_\nu}{n}\right) \leqslant \begin{cases} \omega\left(\frac{t_{s+1}}{n}\right), & \text{если } s+2 < n, \\ \omega(\pi), & \text{если } s+2 = n, \end{cases} \tag{5}$$

ло

$$E(H_\omega; \tilde{R}_n) = \frac{1}{\pi n}\int_0^\infty F_0(\Phi, t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt + \gamma_n, \quad \gamma_n \leqslant 0, \ \gamma_n = O\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

где $\Phi(x) = 3\left[\mathrm{si}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{si}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \mathrm{si}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{si}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Заметим, что

$$E(H_\omega; \tilde{R}_n) = \sup_{f\in H_\omega} |f(0) - \tilde{R}_n(f; 0)| = \sup_{f\in H_\omega^0} |\tilde{R}_n(f; 0)|,$$

где H_ω^0 — подкласс функций $f(t)$ из класса H_ω таких, что $f(0)=0$. Из (1) следует, что $\tilde{R}_n(f; 0) = 0$ в случае нечетных $f(t)$, поэтому будем рассматривать лишь четные функции.

Так как

$$\tilde{R}_n(f; 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cos nt}{\left(\cos t - \cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos t - \cos\frac{3\pi}{2n}\right)}\,dt,$$

то после несложных выкладок, в случае четных функций $f(t)$, получим

$$\tilde{R}_n(f; 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f\left(\frac{t}{n}\right)\psi(t)\,dt,$$

где $\psi(t) = \left[3\left(\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{t-\frac{\pi}{2}}\right) - \left(\frac{1}{t+\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{t-\frac{3\pi}{2}}\right)\right]\cos t$.

Если $f(t)\in H_\omega^0$, то $f\left(\frac{t}{n}\right)\in H_{\omega_n}$, классу функций $f(t)$, периодических, четных, $f(0)=0$, и удовлетворяющих условию $|f(t)-f(t')| \leqslant \omega_n(|t-t'|)$, где $\omega_n(t) = \omega\left(\frac{t}{n}\right)$. Поэтому

$$E(H_\omega; \tilde{R}_n) = \sup_{f\in H_{\omega_n}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,\psi(t)\,dt\right| \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in H_{\omega_n}} |\tilde{R}_n(f)|;$$

$\tilde{R}_n(f)$ представим в виде

$$\tilde{R}_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} f(t)\,\psi(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^\infty \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi(t)\,dt,$$

где t_i — нули функции $3\left[\mathrm{si}\left(t+\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{si}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \mathrm{si}\left(t+\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{si}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$, занумерованные в порядке возрастания. Тогда

$$|\tilde{R}_n(f)| \leqslant \sup_{f\in H_{\omega_n}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{t_0} f(t)\,\psi(t)\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^\infty \sup_{f\in H_{\omega_n}}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi(t)\,dt\right|.$$

Так как $t_0 \in \left[2\pi, \frac{13\pi}{6}\right]$, то $\psi(t) > 0$ в интервале $[0, t_0]$ и

$$\sup_{f\in H_{\omega_n}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{t_0} f(t)\,\psi(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} \omega_n(t)\,\psi(t)\,dt.$$

Для определения величины $e_i \overset{\text{df}}{=} \sup\limits_{f\in H_{\omega_n}} \left| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,\psi(t)\,dt \right|$ применим лемму из работы [4]. Положим

$$\Phi(t) = -\int\limits_t^\infty \psi(t)\,dt = 3\left[\operatorname{si}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]+$$
$$+\operatorname{si}\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right).$$

Функцию $\rho_i(t)$ определим из равенств

$$\Phi(t)=\Phi(\rho_i(t)),\quad t_i\leqslant t\leqslant\frac{2i+5}{2}\pi\leqslant\rho_i(t)\leqslant t_{i+1},\quad i=0,1,2,\ldots$$

Тогда в силу леммы из работы [4] $e_i = \left|\int\limits_{t_i}^{\frac{2i+5}{2}\pi} \psi(t)\,\omega_n(\rho_i(t)-t)\,dt\right|$.

Таким образом,

$$|\tilde R_n(f)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{t_0}\omega_n(t)\,\psi(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int\limits_{t_i}^{\frac{2i+5}{2}\pi}\psi(t)\,\omega_n(\rho_i(t)-t)\,dt\right|.$$

Производя оценку сверху правой части полученного выражения и учитывая, что $\rho_i(t)-t\leqslant t_{i+1}-t_i$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_{i+1}-t_i=\pi$ и $t_0=6{,}82310$, получаем

$$|\tilde R_n(f)| < \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi}\left[-2\operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{si}\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{si}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{si}\left(\frac{5\pi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(t_0-\frac{\pi}{2}\right)^3\left(t_0+\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(t_0+\frac{\pi}{2}\right)^3\left(t_0-\frac{3\pi}{2}\right)}\right]+\frac{\omega\left(\frac{t_0}{\pi}\right)}{n}\left[-3\operatorname{si}\left(\frac{3\pi}{2}\right)-3\operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{si}\left(\frac{5\pi}{2}\right)-\operatorname{si}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]<1{,}87013\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+0{,}301571\omega\left(\frac{t_0}{n}\right)<3\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Таким образом, оценка (4) установлена.

Найдем асимптотические равенства для величин $E(H_\omega;\tilde R_n)$.

Исходя из представления

$$E(H_\omega:\tilde R_n)=\sup_{f\in H_{\omega_n}}|\tilde R_n(f)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{t_0}\omega_n(t)\,\psi(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int\limits_{ti}^{\frac{2i+5}{2}\pi}\psi(t)\,\omega_n(\rho_i(t)-t)\,dt\right|,$$

проведем доказательство второй части теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 из работы [1]. Имеем

$$E(H_\omega;\tilde R_n)=\frac{1}{\pi n}\int\limits_0^\infty F_0(\Phi,t)\,\omega'\left(\frac{t}{n}\right)dt+\gamma_n,\quad \gamma_n\leqslant 0,\ \gamma_n=O\left[\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

где $\Phi(t) = 3\left[\mathrm{si}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{si}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\right.$, а $F_0(\Phi, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\Phi}_i(t)$, $\overline{\Phi}_i(t)$ — неубывающая перестановка функции

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} |\Phi(t)|, & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & t \overline{\in} [t_i, t_{i+1}], \end{cases}$$

т. е. функция, обратная к функции $x = M_i(y)$; здесь $M_i(y) = \mathrm{mes}\, E(\Phi_i(t) > y)$.

Замечание. Если $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, тогда соотношение (5) выполняется, поэтому для $E(H^\alpha, \tilde{R}_n)$ имеет место равенство

$$E(H^\alpha; \tilde{R}_n) = \frac{\alpha}{\pi n^\alpha} \int_0^\infty F_0(\Phi, t)\, t^{\alpha-1} dt + \gamma_n, \quad \gamma_n \leqslant 0, \quad \gamma_n = O\left[\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанец А. И. Приближение периодических функций полиномами Рогозинского и полиномами С. Н. Бернштейна.— Препринт ИМ-74-1, Ин-т математики АН УССР, 1974.— 42 с.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.— 512 с.
3. Дзядык В. К., Степанец А. И. Асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций классов Гельдера при помощи полиномов Рогозинского.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 4, с. 475—486.
4. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, с. 190—198.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию 30.VII.1976 г.
после переработки — 26.X.1978 г.,