УДК 518:517.949.12

В. Л. Макаров, В. Л. Бурковская, А. А. Клунник

Об интерполяции типа Эрмита в классе x^{α}-гармонических функций заданной гладкости

При обобщении метода уточнений разностями высших порядков [1] на случай уравнений эллиптического типа специального вида возникает чисто теоретическая задача построения x^{α}-гармонической интерполяционной функции для интерполяционного процесса типа Эрмита, в котором дифференцирование производится по переменной x.

Попытки построения подобных интерполяционных функций делались в работе [2]. Однако кроме простейших случаев, сводящихся к одномерной интерполяции, обоснованных результатов в упомянутой работе получено не было.

Не стремясь к полной общности постановки и решения задачи теории интерполирования обобщенных гармонических функций, рассмотрим задачу интерполирования в постановке, естественно вытекающей при обобщении результатов работы [1] для уравнения Лапласа на краевые задачи теории обобщенного осесимметричного потенциала [3].

Пусть требуется найти функцию $Q(x, y) \in C_{k,\lambda}(\overline{G})$ и такую, что

$$(L_1 + L_2) Q(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^p Q(x, y)}{\partial x^p} \right|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} = \alpha_{jp}, \quad j = \overline{1, 4}; \quad p = \overline{0, k}. \tag{2}$$

Здесь $C_{k,\lambda}(\overline{G})$ — класс функций, k раз дифференцированных на $\overline{G}$, все производные порядка k которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем λ; G — прямоугольник $\{(x, y): 0 < a_1 < x < a_2;\ \ 0 \leqslant b_1 < y < b_2\}$; (x_j, y_j) — вершины G, пронумерованные против часовой стрелки, начиная с левого верхнего угла; α_{jp} — заданные постоянные; L_1 и L_2 перестановочные операторы вида

$$L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + c_1(x, y), \quad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x, y),$$

$$a(x, y),\ \ b(x, y),\ \ c_1(x, y),\ \ c_2(x, y) \in C_{k-2,\lambda}(\overline{G}),\ \ 0 < \lambda < 1.$$

Функцию $Q(x, y)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, назовем интерполяционной обобщенной гармонической функцией из класса $C_{k,\lambda}(\overline{G})$.

Назовем функции $Q_{il}(x, y) \in C_{k,\lambda}(\overline{G})$ фундаментальными обобщенными гармоническими функциями из соответствующего класса, если они удовлетворяют условиям:

$$(L_1 + L_2)\, Q_{il}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^p Q_{il}(x, y)}{\partial x^p}\right|_{\substack{x=x_j\\ y=y_j}} = \delta_{ij}\delta_{lp}, \tag{4}$$

$j = \overline{1, 4}$; $p = \overline{0, k}$; $i = \overline{1, 4}$; $l = \overline{0, k}$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Если функции $Q_{il}(x, y)$ найдены, то очевидно, искомая функция $Q(x, y)$, удовлетворяющая условиям (1), (2), запишется в виде

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{l=0}^{k} \alpha_{il} Q_{il}(x, y). \tag{5}$$

Для определенности остановимся на нахождении $Q_{3l}(x, y)$. Остальные функции $Q_{il}(x, y)$ находятся аналогично.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(L_1 + L_2)\, u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G, \tag{6}$$

$$u|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_4} = 0, \tag{7}$$

$$u|_{\Gamma_2} = \varphi_1(x), \quad u|_{\Gamma_3} = \varphi_2(y), \tag{8}$$

где Γ_i $(i = \overline{1, 4})$ — стороны прямоугольника $\overline{G}$, пронумерованные против движения часовой стрелки, начиная с левой вертикальной стороны; $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ — заданные функции. Найти функцию $Q_{3l}(x, y)$ можно на основании следующей леммы.

Лемма. *Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi_1(x) \in C_{k,\lambda}(\Gamma_2); \quad \varphi_2(y) \in C_{k,\lambda}(\Gamma_3); \tag{9}$$

$$\varphi_1^{(p)}(x_2) = 0, \quad \varphi_1^{(p)}(x_3) = \delta_{lp}, \quad p = \overline{0, k}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} L_1^s\varphi_1(x_3) - (-1)^s L_2^s\varphi_2(y_3) = 0, \\ L_2^s\varphi_2(y_4) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда для решения $u(x, y)$ задачи (6)—(8) *справедливо равенство*

$$u(x, y) = Q_{3l}(x, y). \tag{12}$$

В качестве $\varphi_1(x)$ можно взять интерполяционный многочлен типа Эрмита с двумя узлами интерполяции x_2 и x_3, удовлетворяющий условиям

(10). Согласно равенству (11) получаем, что операторные производные функции $\varphi_2(y)$ до $\left[\frac{k}{2}\right]$-го порядка включительно на концах отрезка $[y_3, y_4]$ должны принимать заданные значения. Таким образом, задачу нахождения функции $\varphi_2(y)$ также можно решить с помощью интерполяционного многочлена типа Эрмита.

Пусть

$$L_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{13}$$

При $\alpha = 2k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ x^{2k}-гармоническую функцию $Q^{(2k)}(x, y)$, т. е. функцию, удовлетворяющую уравнению (1) с операторами (13), принимающую в произвольных точках $P_i(x_i, y_i)$ некоторой области G заданные значения $a_i^{(2k)}$, $i = \overline{1, n}$, удается построить в явном виде. При $k = 0$ поставленная задача сводится к нахождению гармонической функции $Q^{(0)}(x, y)$ и может быть однозначно решена для любого фиксированного p при помощи полинома Эрмита комплексной переменной (см., например, [4, 5]).

Пользуясь принципом соответствия из [6] и методом математической индукции, после соответствующих преобразований получаем общую формулу

$$Q^{(2k)}(x, y) = \left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \operatorname{Re} W(z), \tag{14}$$

где

$$W(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^{k+1}(z)}{(z-z_i)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} b_{ij} \frac{(z-z_j)^j}{j!} \left\{\frac{(z-z_i)^{k+1}}{\omega^{k+1}(z)}\right\}_{(P_i)}^{(k-j)},$$

$\omega(z) = \prod\limits_{i=1}^{k} (z - z_i)$; $\{\cdots\}_{(p_i)}^{(k)}$ — сумма тех членов разложения функции, стоящей в скобках, в ряд Тейлора около точки p_i, степени которых не превышают k;

$$b_{ij} = \sum_{r=0}^{[j/2]} c_{k-j-r} a_{jj-2r} x^{j-2r}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{0, k},$$

c_l — произвольные постоянные, $c_0 = a_i^{(2k)}$, $a_{ij} = \dfrac{i}{j!\, 2^{\frac{i-j}{2}} \left(\frac{i-j}{2}\right)!}$. Распространение этого способа на случай произвольного α не удается.

Если потребовать дополнительно выполнение условий $Q^{(2k)}(x, y) = Q^{(2k)}(-x, y)$, то построенная указанным способом x^{2k}-гармоническая функция будет многочленом.

Для произвольного вещественного α будем изучать только многочленную интерполяцию. Нужно найти x^{α}-гармонический многочлен наименьшей степени $Q^{(\alpha)}(x, y)$, удовлетворяющий условиям (2). По сравнению с поставленной в начале статьи интерполяционной задачей класс $C_{k,\lambda}(\overline{G})$, которому должна принадлежать интерполирующая функция $Q^{(\alpha)}(x, y)$, заменен на класс x^{α}-гармонических многочленов, содержащийся в классе $C_{\infty}(\overline{G})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Существует единственный x^{α}-гармонический многочлен степени $4k + 3$, удовлетворяющий условиям* (2).

Доказательство теоремы 1 существенно опирается на теорему о многочленном решении задачи Дирихле теории обобщенного осесимметричного потенциала [7].

Заметим, что теорема 1 только доказывает существование и единственность интерполяционного многочлена типа Эрмита. Явный же вид его построен для четного α (формула (14)).

В заключение рассмотрим некоторое обобщение задачи (1), (13), (2): найти многочлен $P_q(x, y)$ наименьшей степени q, удовлетворяющий уравнению (1), (13) и условиям

$$P_q(x_j, b_1) = a_j; \quad j = \overline{1, n}; \quad P_q(x_j, b_2) = a_j, \quad j = \overline{n+1, m+1}, \tag{15}$$

где $x_j \in [a_1, a_2]$, $j = \overline{1, m+1}$. Существование и единственность такого многочлена $P_q(x, y)$ доказывается аналогично теореме 1.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $u(x, y) \in C_\infty(\overline{G})$ — x^α-гармоническая функция, удовлетворяющая условиям $u(x_j, b_1) = a_j$, $j = 1, n$; $u(x_j; b_2) = a_j$, $j = \overline{n+1, m+1}$, и следы ее на стороны прямоугольника $\overline{G}$ — целые функции. Тогда интерполяционный процесс* (15) — *равномерно сходящийся в $\overline{G}$, т. е.* $|u(x, y) - P_q(x, y)| \underset{m \to \infty}{=>} 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. I.— Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 7, с. 946—961.
2. Moris Marden. Axisymmetric Harmonic Interlation Polinomials in R^N.—Trans. Amer. Math. Soc., 1974, V, **196**, p. 385—402.
3. Макаров В. Л., Бурковская В. Л. Решение задачи Дирихле для уравнения обобщенного осесимметричного потенциала методом уточнений разностями высших порядков.— В кн.: Точность и надежность кибернетических систем. Ин-т электродинамики АН УССР, 1975, вып. 3, с. 46—53.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1.— М.: Физматгиз, 1962.— 464 с.
5. Никольский С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками.— Мат. сб., 1957, **43**, № 1, с. 127—144.
6. Weinstein A. Some Applications of Generalized Axially Simmetric Potential Theory to Continuum Mechanics. — В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. Т. II. М.: Наука, 1965, с. 440—454.
7. Бурковская В. Л. О многочленном решении задачи Дирихле теории обобщенного осесимметричного потенциала.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика. Изд-во Киевск. ун-та, 1977, вып. 33, с. 36—40.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.X.1977 г.