УДК 513.88

А. П. Матковский

О разрешимости краевой задачи для уравнения с ограниченными операторными коэффициентами

В данной работе рассматривается краевая задача в $L_2([a, b], H)$ (H — сепарабельное гильбертово пространство) для дифференциального уравнения и краевых условий с ограниченными операторными коэффициентами. Изучаются различные свойства разрешимости краевой задачи (корректная, плотная, нормальная и т. д.) в зависимости от тех или иных свойств разрешимости построенного по дифференциальному уравнению и краевым условиям характеристического операторного уравнения. Подобные вопросы для некоторых дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами (даже неограниченными) рассматривались во многих работах, среди которых отметим работы [1—6].

1. Рассмотрим дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением l и краевыми условиями

$$l[y(x)] \equiv y^{(n)}(x) + P_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + P_n(x)\,y(x), \tag{1}$$

$$
\begin{gathered}
U_{11}y(a)+\ldots+U_{1n}y^{(n-1)}(a)+U_{1n+1}y(b)+\ldots+U_{12n}y^{(n-1)}(b)=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
U_{k1}y(a)+\ldots+U_{kn}y^{(n-1)}(a)+U_{kn+1}y(b)+\ldots+U_{k2n}y^{(n-1)}(b)=0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $n\geqslant 2$, $k\geqslant 1$, $y^{(n-1)}$ — абсолютно непрерывная функция, $y^{(n)}\in L_2([a,b],H)$, $P_m(x)\in B(H,H)$ $(m=1,2,\ldots,n)$, P_m сильно непрерывно зависит от $x\in[a,b]$, $U_{ij}\in B(H,H)$ $(i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,2n)$. Нулевой элемент везде обозначается через 0. В дальнейшем, вместо $L_2([a,b],H)$ пишем L_2. Краевые условия (2) запишем в виде

$$U\eta=0, \tag{3}$$

где $U=\begin{pmatrix} U_{11},\ldots,U_{12n}\\ \cdots\cdots\\ U_{k1},\ldots,U_{k2n}\end{pmatrix}\in B(H^{2n},H^k)$, $\quad\eta=(y(a),\ldots,y^{(n-1)}(a),y(b),\ldots$
$\ldots,y^{(n-1)}(b))\in H^{2n}$. Далее, $D(\cdot)$, $R(\cdot)$, $Z(\cdot)$ — соответственно область определения, область значений, нулевое подпространство.

Определение. Краевые условия

$$V\eta=0, \tag{4}$$

где $V\in B(H^{2n},H^m)$, $m\geqslant 1$, называются *эквивалентными* краевым условиям (3), если $Z(V)=Z(U)$.

Предложение 1. *Существуют краевые условия* (4), *эквивалентные краевым условиям* (3), *и такие, что*

а) $R(V)\subset H$, *т. е. в* (3) *можно считать, что* $k=1$;

б) *если* $\dim Z(U)^{\perp}=\infty$, *то* $R(V)=H$.

Доказательство предложения а) легко следует из бесконечномерности H. Докажем предложение б). Пусть Q — проектор из H^{2n} на $Z(U)^{\perp}$, K — взаимно однозначно отображает $Z(U)^{\perp}$ на H, $K\in B(H^{2n},H)$. Положив $V=K\cdot Q$, получим, что $Z(V)=Z(U)$ и $R(V)=H$.

В дальнейшем, везде, где не оговорено противное, предполагаем, что $R(U)=H$. В конце рассмотрен случай, когда $\dim Z(U)^{\perp}=m<\infty$.

2. Найдем решение краевой задачи

$$Ly=\lambda y+f, \tag{5}$$

где λ — комплексный параметр, $f\in L_2$.

Пусть $Y(x,\lambda)$ — фундаментальная система (см. [7]) уравнения

$$ly=\lambda y, \tag{6}$$

тогда общее решение уравнения (6) имеет вид $y=Yc$ $(c\in H)$. Зависимость от x, λ там, где это не вызывает недоразумений, писать не будем. Решение неоднородного уравнения

$$ly=\lambda y+f \tag{7}$$

находим методом вариации произвольных постоянных:

$$y=Y\int_s^x W^{-1}(t,\lambda)\,(g_1,g_2-g_1',\ldots,g_{n-1}-g_{n-2}',f-q)\,dt,$$

где $s\in[a,b]$, $W(x,\lambda)$ — вронскиан от Y, $W\in B(H,H^n)$, $q=g_{n-1}'+P_1g_{n-1}+\ldots$
$\ldots+P_{n-1}g_1$, g_i — произвольная функция из L_2, для которой выполняются условия:

1) g_i — абсолютно непрерывна на $[a,b]$;

2) $g_i'\in L_2$;

3) $g_i(a) = g_i(b) = g_i(s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Введем обозначения: $gf = (g_1, g_2 - g_1', \dots, g_{n-1} - g_{n-2}', f - q)$, $Jgf = \int\limits_s^x W^{-1} gf dt$; $gf \in L_2^n$, $J = J(x, \lambda) \in B(L_2^n, H)$. Если $g_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$, то gf обозначим через $\bar{f}$.

Общее решение уравнения (7) запишем в виде

$$y = Y(Jgf + h) \quad (h \in H). \tag{8}$$

Это решение определяется начальными условиями $y^{(k)}(s) = Y^{(k)}(s) h$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$.

Замечание. Для g_i требуется только выполнение условий 1) — 3), и других ограничений на g_i нет. При изменении g_i решение y не изменится, так как оно полностью определяется начальными условиями, в которые g_i не входит.

Выберем h так, чтобы y удовлетворяло краевым условиям (3). Так как $(y, y', \dots, y^{(n-1)}) = W(Jgf + h) + \tilde{g}$, где $\tilde{g} = (0, g_1, \dots, g_{n-1})$, то подставляя (8) в (3), получаем:

$$U \begin{pmatrix} W(a, \lambda)[J(a, \lambda) gf + h] \\ W(b, \lambda)[J(b, \lambda) gf + h] \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Вводя обозначения:

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} W(a, \lambda) \\ W(b, \lambda) \end{pmatrix} \in B(H, H^{2n}), \quad \mathcal{D}_\lambda = U \cdot T_\lambda,$$

$$M_\lambda = -\begin{pmatrix} W(a, \lambda) \cdot J(a, \lambda) \\ W(b, \lambda) \cdot J(b, \lambda) \end{pmatrix} \in B(L_2^n, H^{2n}), \ C_\lambda = U \cdot M_\lambda,$$

уравнение (9) запишем в виде

$$\mathcal{D}_\lambda h = C_\lambda gf. \tag{10}$$

Если же $f = 0$, то, взяв $g_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$, уравнения (5), (10) представим в виде

$$Ly = \lambda y, \tag{11}$$

$$\mathcal{D}_\lambda h = 0. \tag{12}$$

Предложение 2. *Уравнения* (11), (12) *имеют одинаковое число линейно независимых решений, т. е.*

$$\dim Z(L_\lambda) = \dim Z(\mathcal{D}_\lambda),$$

где $L_\lambda = L - \lambda I$, I — *тождественный оператор.*

Доказательство. Пусть $y_1, \dots, y_m$ — линейно независимые решения уравнения (11), тогда $y_i = Yh_i$ $(h_i \in H, \ i = 1, 2, \dots, m)$; ясно, что $\{h_i\}$ линейно независимы и $\mathcal{D}_\lambda h_i = 0$.

Наоборот, пусть $h_1, \dots, h_m$ — линейно независимые решения уравнения (12), тогда $y_i = Yh_i$ — решение уравнения (11). Если $\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i Y h_i \equiv 0$ (α_i — комплексное число), то $Y \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i h_i \equiv 0$. Дифференцируя последнее тождество $n-1$ раз, получаем, что $W \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i h_i \equiv 0$, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i h_i = 0$ и $\{y_i\}$ линейно независимы.

3. Предложение 3. *Пусть* $R(U) = H$ (*см. предложение* 1), *тогда уравнение* (5) а) *имеет решение;* б) *везде разрешимо;* в) *корректно раз-*

решимо на всем пространстве; г) *плотно разрешимо*; д) *нормально разрешимо тогда и только тогда, когда уравнение* (10) *обладает соответствующим свойством*.

Это предложение можно записать в виде

а) $f \in R(L_\lambda) \Leftrightarrow C_\lambda gf \in R(D_\lambda)$;

б) $R(L_\lambda) = L_2 \Leftrightarrow R(D_\lambda) = H$;

в) $L_\lambda^{-1} \in B(L_2, L_2) \Leftrightarrow D_\lambda^{-1} \in B(H, H)$;

г) $\overline{R(L_\lambda)} = L_2 \Leftrightarrow \overline{R(D_\lambda)} = H$;

д) $R(L_\lambda) = \overline{R(L_\lambda)} \Leftrightarrow R(D_\lambda) = \overline{R(D_\lambda)}$.

Доказательство. Предложение а) следует из того, что формула (8) дает общее решение уравнения (7), а решение краевой задачи (5) определяется формулой (8), в которой h — решение уравнения (10).

Докажем предложение б). Пусть $R(D_\lambda) = H$, тогда уравнение (10) имеет решение для каждого $f \in L_2$, и из предложения 3, а) следует, что $R(L_\lambda) = L_2$.

Наоборот, докажем предварительно, что

$$\forall h \in H^{2n}, \ \exists \ f \in L_2^n : M_\lambda gf = h, \tag{13}$$

где $\{g_i\}$ удовлетворяют условиям 1) — 3), $f \in L_2$. Действительно, пусть $h_1, h_2 \in H^n$. Положим

$$gf = Wv, \tag{14}$$

где

$$v(x) = \begin{cases} W^{-1}(a, \lambda)\, h_1 \dfrac{(x-a)^n (x-s)^n}{\int\limits_s^a (t-a)^n (t-s)^n \, dt} & \text{при } x \in [a, s], \\ W^{-1}(b, \lambda)\, h_2 \dfrac{(x-s)^n (x-b)^n}{\int\limits_s^b (t-s)^n (t-b)^n \, dt} & \text{при } x \in [s, b]. \end{cases} \qquad s = \frac{a+b}{2},$$

Ясно, что $gf \in L_2^n$. Из (14) получаем

$$\begin{gathered} g_i = \sum_{k=1}^{i} (Y^{(k-1)} v)^{(i-k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ f = Y^{(n-1)} v + g'_{n-1} + P_1 g_{n-1} + \ldots + P_{n-1} g_1, \ f \in L_2. \end{gathered} \tag{15}$$

Легко видеть, что для $\{g_i\}$ выполняются условия 1) — 3). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $M_\lambda gf = (h_1, h_2)$. Заметим, что так как $R(U) = H$, то из (13) следует:

$$R(C_\lambda) = H. \tag{16}$$

Пусть $R(L_\lambda) = L_2$, тогда для каждого $f \in L_2$: $C_\lambda gf \in R(D_\lambda)$ и в силу (16) $R(D_\lambda) = H$.

Предложение в) следует из предложений 2, 3, б) и теоремы Банаха об обратном операторе.

Для доказательства предложения г) допустим, что $\overline{R(L_\lambda)} = L_2$, $\varepsilon > 0$, $h \in H$. В силу (16) $\exists\, gf \in L_2^n : C_\lambda gf = h$, $f \in L_2$. Существует $f_0 \in R(L_\lambda)$ такой, что $f = f_0 + f_\varepsilon$, где $f_\varepsilon \in L_2$ и $\| f_\varepsilon \| < \varepsilon$. Положим $gf_0 = gf - \bar{f}_\varepsilon$. В силу предложения 3, а) $\exists h_0 \in H^{2n} : D_\lambda h_0 = C_\lambda gf_0$. Так как $D_\lambda h_0 = C_\lambda gf - C_\lambda \bar{f}_\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| C_\lambda \bar{f}_\varepsilon \| = 0$, то $\overline{R(D_\lambda)} = H$.

Наоборот, пусть $R(D_\lambda) = H$. Возьмем $\varepsilon > 0$, $f \in L_2$. Существуют h_0, $h_\varepsilon \in H$ такие, что $C_\lambda \bar{f} = D_\lambda h_0 + h_\varepsilon$ и $\| h_\varepsilon \| < \varepsilon$. Из (16) получаем, что $\exists f_\varepsilon \in L_2 : h_\varepsilon = C_\lambda g f_\varepsilon$, следовательно, $D_\lambda h_0 = C_\lambda (\bar{f} - g f_\varepsilon)$. В силу предложения 3, а) $f - f_\varepsilon \in R(L_\lambda)$. Докажем, что f_ε можно выбрать так, чтобы $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| f_\varepsilon \| = 0$. Пусть $\hat{U}$ — сужение U на $Z(U)^\perp$, тогда $R(\hat{U}) = H$, $Z(\hat{U}) = 0$. Так как $Z(U)^\perp$ — сепарабельное гильбертово пространство, то по теореме Банаха об обратном операторе $\| \hat{U}^{-1} \| < \infty$. Возьмем в (14) $(h_1, h_2) = \hat{U}^{-1} h_\varepsilon$. Ясно, что $C_\lambda g f_\varepsilon = h_\varepsilon$. Если $\varepsilon \to 0$, то $\| (h_1, h_2) \| \to 0$, $\| v^{(i)} \| \to 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и из (15) получаем, что $\| f_\varepsilon \| \to 0$. Следовательно, $\overline{R(L_\lambda)} = L_2$.

Доказательство предложения д) во многом повторяет доказательство предыдущего предложения и поэтому опускается.

Следствие 1. *Из предложения* 3,д) *и теоремы* 2.4 *из* [8, *с.* 11] *получаем:*

$$R(L_\lambda) = \overline{R(L_\lambda)} \Leftrightarrow H = R(D_\lambda) \dot{+} \mathfrak{L},$$

где $\mathfrak{L}$ — *подпространство* (*замкнутое*) H.

4. Приведем другой критерий корректной разрешимости на всем пространстве уравнения (5).

Предложение 4.

а) $L_\lambda^{-1} \in B(L_2, L_2) \Leftrightarrow H^{2n} = Z(U) \dot{+} R(T_\lambda)$;

б) $R(L_\lambda) = L_2 \Leftrightarrow H^{2n} = Z(U) + R(T_\lambda)$.

Доказательство. Пусть $L_\lambda^{-1} \in B(L_2, L_2)$, $h_1 \in H^{2n}$, тогда в силу (13) $\exists g f \in L_2^n : M_\lambda g f = h_1$, $f \in L_2$, и уравнение (10) примет вид

$$U T_\lambda h = U h_1. \tag{17}$$

Так как $f \in R(L_\lambda)$ и $\dim Z(L_\lambda) = 0$, то в силу предложений 2 и 3, а) уравнение (17) имеет единственное решение $h = h_0$. Положим $h_R = T_\lambda h_0$; $h_R \in R(T_\lambda)$. Уравнение (17) примет вид $U h_R = U h_1$ или $U(h_R - h_1) = 0$. Полагая $h_Z = (h_1 - h_R) \in Z(U)$, получаем $h_1 = h_R + h_Z$. Однозначность этого представления легко следует из единственности h_0.

Наоборот, пусть $H^{2n} = Z(U) \dot{+} R(T_\lambda)$. Так как $Z(T_\lambda) = 0$, то

$$\dim Z(D_\lambda) = \dim (Z(U) \cap R(T_\lambda)) \tag{18}$$

и, следовательно, $Z(D_\lambda) = 0$. В силу предложения 2 $Z(L_\lambda) = 0$, т. е. L_λ^{-1} существует. Так как оператор T_λ имеет непрерывный обратный (например, $T_\lambda^{-1} = (W^{-1}(a), 0)$; здесь $0 \in B(H^n, H)$), то $R(T_\lambda) = \overline{R(T_\lambda)}$, т. е. $R(T_\lambda)$ — подпространство. Существует «косой» проектор $P \in B(H^{2n}, H^{2n})$ такой, что $R(P) = Z(U)$, $R(I - P) = R(T_\lambda)$ и $\| P \| < \infty$. Пусть $f \in L_2$, $h_1 = M_\lambda \bar{f}$. Проверим, что $h = T_\lambda^{-1}(I - P) h_1$ — решение уравнения (10): $U h_1 = U P h_1 + U(I - P) h_1 = U(I - P) h_1$ — правая часть (10), $U T_\lambda T_\lambda^{-1}(I - P) h_1 = U(I - P) h_1$ — левая часть. Из (8) получаем $y = L_\lambda^{-1} f = Y[J\bar{f} + T_\lambda^{-1}(I - P) M_\lambda \bar{f}]$. Ясно, что $L_\lambda^{-1} \in B(L_2, L_2)$.

Заметим, что при доказательстве этого предложения не использовалось то, что $R(U) = H$.

Предложение б) доказывается аналогично.

Следствие 2. *Из* (18) *и предложения* 4, б) *получаем, что если* $\dim Z(U)^\perp = m < \infty$, *то* $\forall \lambda$, $\dim Z(L_\lambda) = \infty$ *и если* $\dim Z(U) = m < \infty$, *то* $\forall \lambda$, $R(L_\lambda) \neq L_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рофе-Бекетов Ф. С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Мат. сб., 1960, **51**, № 3, с. 293—342.
2. Рофе-Бекетов Ф. С. О разложении по собственным функциям систем с суммируемым потенциалом.— ДАН СССР, 1964, **156**, № 5, с. 1029—1032.
3. Горбачук М. Л. О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 2, с. 3—21.
4. Горбачук М. Л., Кочубей А. Н. Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка.— ДАН СССР, 1971, **201**, № 5, с. 1029—1032.
5. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля с операторным потенциалом.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 3, с. 291—304.
6. Михайлец В. А. Распределение собственных значений операторного уравнения Штурма—Лиувилля.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, **41**, № 3, с. 607—619.
7. Матковский А. П., Мухачев В. А. Фундаментальные системы для дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.— Мат. заметки, 1970, **8**, № 6, с. 777—782.
8. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.— 104 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редакцию
14.XII.1977 г.