УДК 517.95

Э. М. Саак

Аналог теоремы Неймана в классе $W_2^{(1)}(\Omega)$

Рассматривается задача о скачке для уравнения Лапласа на компактном $(n-1)$-мерном дифференцируемом многообразии Γ в n-мерном евклидовом пространстве R^n

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in (R^n \setminus \Gamma),\ u_+(x) - u_-(x) = \varphi(x),\ x \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial u_+(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu} = \psi(x),\ x \in \Gamma,$$

в классе $W_2^{(1)}(R^n \setminus \Gamma)$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ считаются достаточно гладкими. Под пространством $W_2^{(1)}(R^n \setminus \Gamma)$ понимается пополнение множества финитных в R^n гладких вне Γ и имеющих предельные значения $u_\pm$ изнутри и извне поверхности Γ функций $u = u(x)$ по норме

$$\| u \| = \left\{ \int\limits_{R^n \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} (u^+ - u^-)^2 d\Gamma \right\}^{1/2},$$

где ∇ означает градиент по координатам точки $x \in R^n$.

Обозначим решение u_φ первой задачи о скачке $(\psi = 0)$ через $P_2\varphi$, а решение u^ψ второй задачи о скачке $(\varphi = 0)$ — $P_1\psi$. Согласно теореме о свойствах потенциала простого слоя и теореме Ляпунова — Таубера [1, с. 58] о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя операторы P_1 и P_2—соответственно потенциалы простого и двойного слоя. Таким образом, решение задачи о скачке выражается формулой $u = P_2\varphi + P_1\psi$ и можно показать, что потенциалы $P_1 \frac{\partial u_+}{\partial \nu}$ и $P_2 u_+$ служат ортогональными проекторами пространства $W_2^{(1)}(R^n \setminus \Gamma)$ на подпространства H и G гармонических в $(R^n \setminus \Gamma)$ функций, имеющих соответственно нулевой скачок и нулевой скачок нормальной производной.

Это приводит к оценкам $\left\| P_1 \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \right\| \leqslant \| u \|$, $\| P_2 u_+ \| \leqslant \| u \|$, где нормы вычисляются в пространстве $W_2^{(1)}(R^n \setminus \Gamma)$, причем $u(x)$ можно считать функцией, не имеющей скачка на Γ.

Пусть Ω^+ — внутренность, а $\Omega^- \ni \infty$ — внешность поверхности Γ.

Пусть $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_+)$ означает подпространство пространства $W_2^{(1)}(\Omega_+)$, состоящее из гармонических в области Ω_+ функций.

Положим

$$\| u \|' = \left\{ \int\limits_{R^n \setminus \Gamma} | \nabla u |^2 dx \right\}^{1/2}, \ \| u \|'_+ \left\{ \int\limits_{\Omega_+} | \nabla u |^2 dx \right\}^{1/2} \tag{1}$$

и уточним приведенные выше оценки при дополнительном предположении, что поверхность Γ такова, что, какова бы ни была функция $u \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_+)$, элемент $\widetilde{u}(x) = u(x) - \int\limits_{\Gamma} u d\Gamma_0$, $x \in \Omega_+$, допускает продолжение до элемента $u \in W_2^{(1)}(R^n)$ с оценкой

$$\| \widetilde{u} \|' \leqslant c \, \| u \|'_+, \tag{2}$$

где C не зависит от $u(x)$, $d\Gamma_0 = (\text{mes}^{n-1} \Gamma)^{-1} d\Gamma$.

Установим возможность указанного продолжения для достаточно гладких поверхностей Γ. По отношению к функциям из пространства $W_2^{(1)}(\Omega_+)$ Соболева аналогичный факт доказан, например, в монографии [2, с. 213]. Если $\| u \|'_+ < \infty$, то, как известно, определенный выше элемент $\widetilde{u}(x)$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(\Omega_+)$. Сохранив обозначение, продолжим его до элемента из пространства $W_2^{(1)}(R^n)$ с оценкой $\int\limits_{R^n} | \nabla \widetilde{u} |^2 dx \leqslant c_1 \left(\int\limits_{\Omega_+} | \nabla \widetilde{u} |^2 dx + \right.$ $\left. + \int\limits_{\Omega_+} | \widetilde{u} |^2 dx \right)$, где c_1 не зависит от $u(x)$. Величина справа согласно теории соболевских пространств оценивается через величину $\int\limits_{\Omega_+} | \nabla \widetilde{u} |^2 dx +$ $+ \left(\int\limits_{\Gamma} \widetilde{u} d\Gamma_0 \right)^2$, т. е. через первое слагаемое, поскольку $\int\limits_{\Gamma} \widetilde{u} d\Gamma_0 = \int\limits_{\Gamma} \left(u - \right.$ $\left. - \int\limits_{\Gamma} u d\Gamma_0 \right) d\Gamma_0 = 0$. Таким образом, $\int\limits_{R^n} | \nabla \widetilde{u} |^2 dx \leqslant c^2 \int\limits_{\Omega_+} | \nabla \widetilde{u} |^2 dx$, откуда и следует оценка (2).

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_+} | \nabla P_2 u_+ (x) |^2 dx \leqslant q^2 \int\limits_{\Omega_+} | \nabla u_+ (x) |^2 dx,$$

где $u_+ \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_+)$*—произвольный элемент,* q *не зависит от* $u_+(x)$, $0 < q < 1$.

Доказательство. Пусть G_1 — единичный шар подпространства G. Согласно теореме Ляпунова — Таубера $P_2 u_+ \in G$. Рассмотрим множество градиентов функций из подпространства G и за норму в этом множестве примем величину $\| u \|' = \left\{ \int\limits_{R^n \setminus \Gamma} | \nabla u |^2 dx \right\}^{1/2}$. Имеем некоторое гильбертово пространство. Следовательно,

$$\| P_2 u_+ \|' = \sup_{v \in G_1} \int\limits_{R^n \setminus \Gamma} \nabla v \nabla P_2 u_+ dx.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\|P_2 u_+\|' = \sup_{v\in G_1} \int_{\Omega_+} \nabla v \nabla u_+ dx \leqslant \left\{ \int_{\Omega_+} |\nabla u_+|^2 dx \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть

$$\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_-) = \left\{ u : \Delta u(x) = 0,\ x\in\Omega_-,\ u(\infty) = 0,\ \int_{\Omega_-} |\nabla u|^2 dx < \infty \right\}.$$

Обозначим: H_1^- единичный шар в пространстве $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_-)$, а H_1^+ — единичный шар в пространстве $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_+)$. Имеем в силу (2)

$$\sup_{v\in H_1^-} \int_{\Gamma} v \frac{\partial P_2 u_+}{\partial \nu} d\Gamma \geqslant \frac{1}{c} \sup_{v\in H_1^+} \int_{\Gamma} v \frac{\partial P_2 u_+}{\partial \nu} d\Gamma =$$

$$= \frac{1}{c} \sup_{v\in H_1^+} \int_{\Omega_+} \nabla v \nabla P_2 u_+ dx = \frac{1}{c} \left\{ \int_{\Omega_+} |\nabla P_2 u_+|^2 dx \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Но

$$\|P_2 u_+\|'^2 = \int_{\Omega_+} |\nabla P_2 u_+|^2 dx + \int_{\Omega_-} |\nabla P_2 u_+|^2 dx =$$

$$= \left[\sup_{v\in H_1^+} \int_{\Gamma} v \frac{\partial P_2 u_+}{\partial \nu} d\Gamma \right]^2 + \left[\sup_{v\in H_1^-} \int_{\Gamma} v \frac{\partial P_2 u_+}{\partial \nu} d\Gamma \right]^2.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\|P_2 u_+\|'^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) \int_{\Omega_+} |\nabla P_2 u_+|^2 dx.$$

Сопоставляя это неравенство с оценкой (3), получаем

$$\int_{\Omega_+} |\nabla P_2 u_+|^2 dx \leqslant \frac{1}{1 + \frac{1}{c^2}} \int_{\Omega_+} |\nabla u_+|^2 dx,$$

что и доказывает лемму 1.

Теорема 1. *Решение задачи Неймана*

$$\Delta u(x) = 0, \quad x\in\Omega_+, \quad \frac{\partial u_+(x)}{\partial \nu} = \psi(x), \quad x\in\Gamma, \quad \int_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0, \tag{5}$$

может быть получено по формуле

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (P_2^+)^k P_1 \psi, \tag{6}$$

где $P_2^+ u = P_2(u_+)$, *а ряд справа сходится по полунорме* (1).

Доказательство. Беря от обеих частей первого из равенств (5) оператор P_1, прибавляя и вычитая $P_2^+ u$ в полученном равенстве, находим уравнение $u - P_2^+ u = P_1 \psi$. Таким образом, теорема 1 — прямое следствие доказанной выше леммы.

Примечание 1. Равномерная сходимость ряда (6) была известна ранее и соответствующее предложение было названо в работе [1, с. 97] «принципом Неймана». Новое здесь состоит в том, что ряд (6) сходится также и по «энергетической норме».

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\left\| P_1 \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right\| \leqslant q \left\{ \int\limits_{\Omega_-} |\nabla u_-|^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

где $u \in \overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_-)$ — *произвольный элемент,* q *не зависит от* $u_-(x)$, $0<q<1$.

Доказательство. Согласно (2) шар H_q^- с центром в нуле радиуса $q = 1 - \frac{1}{c^2}$ пространства $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_-)$ содержит в себе единичный шар H_1 пространства H. Следовательно,

$$\left\| P_1 \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right\| = \sup_{v \in H_1} \int\limits_{\Gamma} v \left[\frac{\partial \left(P_1 \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right)_+}{\partial \nu} - \frac{\partial \left(P_1 \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \right)_-}{\partial \nu} \right] d\Gamma =$$

$$= \sup_{v \in H_1} \int\limits_{\Gamma} v \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, d\Gamma \leqslant \sup_{v \in H_q} \int\limits_{\Gamma} v \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, d\Gamma = \sup_{v \in H_q^-} \int\limits_{\Omega_-} \nabla u \nabla u_- dx \leqslant q \left\{ \int\limits_{\Omega_-} |\nabla u_-|^2 \, dx \right\},$$

что и утверждалось.

Теорема 2. *Решение задачи Дирихле*

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega_-, \quad u_-(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma,$$

может быть получено по формуле

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_1 \frac{\partial}{\partial \nu_-} \right)^k P_2 \varphi,$$

где знак «минус» означает, что дифференцируются значения извне поверхности Γ, а ряд сходится по норме пространства $\overset{\Delta}{W}{}_2^{(1)}(\Omega_-)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Примечание 2. Выше рассмотрены внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле. Аналогично можно было бы рассмотреть внешнюю задачу Неймана и внутреннюю задачу Дирихле.

Пример. Пусть $n = 3$, $\Gamma = \{x : |x| = 1\}$ — единичная сфера в R^3, $\psi(x) = Y_{n'}^{(m)}$ — сферическая функция индекса (n', m) (n' — натуральное число, m — целое число, $-n' \leqslant m \leqslant n'$). Опуская штрих у n, имеем

$$P_1 Y_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} |x|^n Y_n^{(m)} \left(\dfrac{x}{|x|} \right), & |x| < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2n+1} |x|^{-n-1} Y_n^{(m)} \left(\dfrac{x}{|x|} \right), & |x| > 1, \end{cases}$$

$$P_2 Y_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n+1} |x|^n Y_n^{(m)} \left(\dfrac{x}{|x|} \right), & |x| < 1, \\[2ex] -\dfrac{n}{2n+1} |x|^{-n-1} Y_n^{(m)} \left(\dfrac{x}{|x|} \right), & |x| > 1. \end{cases}$$

Согласно (6) находим

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^k |x|^n Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{1}{n} |x|^n Y_n^{(m)} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad |x| < 1,$$

что служит решением задачи Неймана

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < 1, \quad \frac{\partial u_+(x)}{\partial \nu} = Y_n^{(m)}(x), \quad |x| = 1,$$

в трехмерном единичном шаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Работы по теории потенциала.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— 342 с.

Таганрогский
радиотехнический институт

Поступила в редакцию 20.V.1977 г,.
после переработки — 17.XI.1978г.