УДК 517.54

Л. А. Яременко

О границах звездности и выпуклости некоторых классов регулярных в единичном круге функций

В работе [1] рассмотрены классы $Q(R, R_1)$ регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $F(z)$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, представимых в виде

$$F(z) = \varphi(z)\, g(z), \tag{1}$$

где $\varphi(z)$ и $g(z)$ пробегают некоторые классы R и R_1 регулярных в E функций. Классы R (или $R[\lambda(r); r_0]$) и R_1 (или $R_1[\sigma(r)]$) определены в работе [1], там же дано понятие их согласованности.

Введем классы $P_{[\alpha]}(m)$ и $P_{(\alpha)}(m)$ ($\alpha \in [0; 1)$, $m \geqslant 1$ — целое число) регулярных в E функций, являющиеся естественным обобщением классов $P_{[h]}$ и $P_{(h)}$, $h = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ (см. [1]), и рассмотрим задачу нахождения радиусов звездности функций $F(z)$, определяемых формулой (1), в которой $\varphi(z) \in R[\lambda(r); r_0]$, а $g(z) \in P_{[\alpha]}(m)$, либо $g(z) \in P_{(\alpha)}(m)$.

Обозначим через P класс регулярных в E функций $p(z)$, удовлетворяющих условиям $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$. Функции класса P с разложением вида $p(z) = 1 + a1z^m + \ldots$, $m \geqslant 1$ — целое, обозначим через $P(m)$.

Условимся через $P_{[\alpha]}(m)$ и $P_{(\alpha)}(m)$ обозначать классы регулярных в E функций $g(z)$, определяемые формулами

$$g(z) = \frac{p(z) + h}{1 + h}, \tag{2}$$

$$g(z) = \frac{1 + h}{p(z) + h}, \tag{3}$$

где $h = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha \in [0, 1)$, а $p(z)$ пробегает класс $P(m) \equiv P_{[0]}(m) \equiv P_{(0)}(m)$.

Переходя к установлению границ звездности интересующих нас классов функций, рассмотрим предварительно следующие леммы.

Л е м м а 1. *Пусть $g(z) \in P_{(\alpha)}(m)$. Тогда на каждой окружности $|z| = r < 1$ справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} \geqslant \frac{-2m(1-\alpha)\, r^m}{(1 - r^m)\,[1 + (1-2\alpha)\, r^m]}. \tag{4}$$

Экстремальная функция, реализующая ее в точке $z = r$, имеет вид

$$g(z; r) = \frac{1 - z^m}{1 + (1-2\alpha)\, z^m}.$$

Лемма 2. *Пусть* $g(z)\in P_{[\alpha]}(m)$. *Обозначим через* $r_{h,m}$ *единственный на* $(0;1)$ *корень уравнения*

$$h(1+r^m)(4r^m-1-r^{2m})=(1-r^m)^3.$$

Тогда на каждой окружности $|z|=r<1$

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}\geqslant\sigma(r;m;\alpha), \tag{5}$$

где

$$\sigma(r;m;\alpha)=\frac{-2mr^m}{(1+r^m)[1-r^m+h(1+r^m)]}\ \text{при}\ 0\leqslant r\leqslant r_{h,m}, \tag{6}$$

$$\sigma(r;m;\alpha)=m[2\sqrt{h^2+ah}-(a+2h)]\ \text{при}\ r_{h,m}\leqslant r<1; \tag{7}$$

$a=\dfrac{1+r^{2m}}{1-r^{2m}}$, $h=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. *Нормированная экстремальная функция в случае* (6) *определяется формулой*

$$g(z;r)=\frac{1+(2\alpha-1)z^m}{1+z^m},$$

а в случае (7)—*формулой*

$$g(z;r)=\frac{1-2\alpha\cos\theta_0z^m+(2\alpha-1)z^{2m}}{1-2\cos\theta_0z^m+z^{2m}}$$

при надлежащем выборе $\theta_0\in[0;2\pi]$.

Леммы 1 и 2 нетрудно доказать, опираясь на метод работ [1, 2], учитывая, что оценки (4) и (5) реализуются в тех подклассах классов $P_{(\alpha)}(m)$ и $P_{[\alpha]}(m)$, в которых выполняется условие m-кратной симметрии, т. е. $p(\varepsilon z)=p(z)$, где $\varepsilon=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$.

При получении границ звездности классов типа $Q(R,R_1)$ используем леммы 2 и 6 работы [1], а также леммы 1 и 2 данной заметки. Так как план исследований при этом такой же, как и в работе [1], то ограничимся формулировкой результатов, опуская сложные выкладки. Положив $m=1$, получим некоторые результаты из [1]. Для сокращения не приводим явных выражений экстремальных функций.

Теорема 1. *Пусть заданы классы* $R[\lambda(r);r_0]$ *и* $R_1=P_{(\alpha)}(m)$, $h=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. *Введем функцию*

$$\Phi(r;m)=\frac{2mr^m}{(1-r^m)^2\lambda(r)}-\frac{1+r^m}{1-r^m},\ r\in[0;r_0].$$

Если $\Phi(r_0;m)\geqslant 0$ *и* $r_0<1$, *то при* $0\leqslant h\leqslant\Phi(r_0;m)$, *а если* $r_0=1$ (*в этом случае полагаем* $\Phi(r_0;m)=\infty$), *то при всех* $h\geqslant 0$, *радиус* τ *звездности класса* $Q(R,R_1)$ *равен единственному на* $(0;r_0]$ *корню уравнения* $\Phi(r;m)=h$.

Если число τ *обладает* J-*свойством* (*см.* [1]), *то оно равно также радиусу однолистности этого класса.*

Обозначим через S класс регулярных однолистных в E функций $\varphi(z)$, нормированных условиями $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$. Пусть $\beta\in[0;1)$. Звездные функции класса S порядка или рода β обозначим соответственно через $S^*_{[\beta]}$ и $S^*_{(\beta)}$.

Следствие 1. *Пусть* $R=S^*_{[\beta]}$ *и* $R_1=P_{(\alpha)}(m)$. *Тогда радиус* τ *звездности и однолистности класса* $Q(R,R_1)$ *равен единственному на*

(0; 1) *корню уравнения*

$$(1-2\alpha-2\beta+4\alpha\beta)\, r^{2m+1}-(1-2\alpha)\, r^{2m}-2\,(m-m\alpha-\alpha+2\alpha\beta)\, r^{m+1}-$$
$$-2\,(m-m\alpha+\alpha)\, r^{m}-(1-2\beta)\, r+1=0.$$

Следствие 2. *Пусть* $R=S^{*}_{(\beta)}$ *и* $R_1=P_{(\alpha)}(m)$. *Тогда радиус* τ *звездности и однолистности класса* $Q(R, R_1)$ *равен единственному на* (0; 1) *корню уравнения*

$$(1-2\alpha)\, r^{2m+1}-(1-2\alpha)\, r^{2m}-2\,[m\,(1-\alpha)\,(1-2\beta)-\alpha]\, r^{m+1}-$$
$$-2\,(m-m\alpha+\alpha)\, r^{m}-r+1=0.$$

Следствие 3. *Пусть* $R=S$ *и* $R_1=P_{(\alpha)}(m)$. *Если* $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha\,(m;\,e)$, *где*

$$\alpha\,(m;\,e)=\frac{2me\,(e^2-1)^m+(e-1)^{2m}-(e+1)^{2m}}{2\,(me-1)\,(e^2-1)^m+2\,(e-1)^{2m}},$$

то радиус τ *звездности и однолистности класса* $Q(S, P_{(\alpha)}(m))$ *равен единственному на* $\left(0;\ \mathrm{th}\,\frac{1}{2}\right]$ *корню уравнения*

$$(1-2\alpha)\, r^{2m+1}-(1-2\alpha)\, r^{2m}-2\,(m-m\alpha-\alpha)\, r^{m+1}-$$
$$-2\,(m-m\alpha+\alpha)\, r^{m}-r+1=0.$$

Если же $\alpha>\alpha\,(m;\,e)$, *то радиус звездности (но, вообще говоря, не однолистности) рассматриваемого класса определяется формулой*

$$\tau=\mathrm{th}\,\frac{\psi}{2\sin\psi},$$

где ψ — *единственный на* $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ *корень уравнения*

$$\exp\,(-\psi\,\mathrm{ctg}\,\psi)\cos\psi\,\{(1-2\alpha)\,A^2-B^2+2\alpha AB\}+2m\,(1-\alpha)\,AB=0,$$

в котором

$$A=\left(e^{\frac{\psi}{\sin\psi}}-1\right)^m,\ \ B=\left(e^{\frac{\psi}{\sin\psi}}+1\right)^m.$$

Теорема 2. *Пусть заданы классы* $R[\lambda(r);\, r_0]$ *и* $R_1=P_{[\alpha]}(m)$, $h=\frac{\alpha}{1-\alpha}$. *Рассмотрим функции*

$$T(r;\,m)=\frac{(1-r^m)^3}{(1+r^m)\,(4r^m-1-r^{2m})},\ \ U(r;\,m)=\frac{2mr^m}{(1+r^m)^2\,\lambda(r)}-\frac{1-r^m}{1+r^m},$$

$$V(r;\,m)=\frac{1}{4\lambda(r)}\left[\frac{m\,(1+r^{2m})}{1-r^{2m}}-\lambda(r)\right]^2,$$

и обозначим через $r_{h,m}$ *единственный на* (0; 1) *корень уравнения* $T(r;\,m)=h$. *Если* $r_0\leqslant r_{h,m}$ *и* $U(r_0;\,m)\geqslant h$, *либо если* $r_0\geqslant r_{h,m}$ *и* $U(r_{h,m};\,m)\geqslant h$, *то радиус звездности* τ *класса* $Q(R, R_1)$ *равен единственному на* $(0;\, r_0]$ *корню уравнения*

$$U(r;\,m)=h. \tag{8}$$

Если же $r_0\geqslant r_{h,m}$ *и* $V(r_0;\,m)\geqslant h$, *но* $V(r_{h,m};\,m)\leqslant h$, *то радиус звездности рассматриваемого класса равен единственному на* $(r_{h,m};\, r_0)$ *корню уравнения*

$$V(r;\,m)=h. \tag{9}$$

Если число τ в любом из этих случаев обладает J-свойством, то оно равно одновременно и радиусу однолистности этого класса.

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы 2 $r_0 = 1$. Обозначим через $r_{\beta,m}$ единственный на $(0; 1)$ корень уравнения*

$$\lambda(r) = \frac{m(4r^m - 1 - r^{2m})}{1 - r^m}$$

и пусть $h_{\beta,m} = T(r_{\beta,m}; m)$. Тогда при $h \in [0; h_{\beta,m}]$ для радиуса τ получим уравнение (8), а при $h > h_{\beta,m}$ — уравнение (9). Замечание об J-свойстве остается в силе.

Следствие 5. *Пусть в теореме 2 $R = S^*_{[\beta]}$. С помощью следствия 4 для $r_{\beta,m}$ получаем уравнение*

$$(m + 1 - 2\beta) r^{2m+1} + (m - 1) r^{2m} - 4mr^{m+1} - 4mr^m + \\ + (m + 2\beta - 1) r + m + 1 = 0,$$

а уравнения (8) и (9) принимают соответственно вид

$$(1 - 2\alpha - 2\beta + 4\alpha\beta) r^{2m+1} - (1 - 2\alpha) r^{2m} - 2(m - m\alpha + \alpha - 2\alpha\beta) r^{m+1} - \\ - 2(m - m\alpha - \alpha) r^m - (1 - 2\beta) r + 1 = 0, \tag{8'}$$

$$h = \frac{\{m(1 + r^{2m})(1 + r) - (1 - r^{2m})[1 + (2\beta - 1) r]\}^2}{4(1 - r_{2m})^2 (1 + r)[1 + (2\beta - 1) r]}. \tag{9'}$$

Следствие 6. *Пусть в теореме 2 $R = S^*_{(\beta)}$. Вновь пользуясь следствием 4, для $r_{\beta,m}$ получаем уравнение*

$$(1 + m - 2m\beta) r^{2m+1} + (m - 1) r^{2m} - 4m(1 - 2\beta) r^{m+1} - 4mr^m + \\ + (m - 1 - 2m\beta) r + m + 1 = 0,$$

а для уравнений (8) и (9) —

$$(1 - 2\alpha) r^{2m+1} - (1 - 2\alpha) r^{2m} - 2[m(1 - \alpha)(1 - 2\beta) + \alpha] r^{m+1} - \\ - 2(m - m\alpha - \alpha) r^m - r + 1 = 0, \tag{8''}$$

$$h = \frac{\{m(1 + r^{2m})[1 + (1 - 2\beta) r] - (1 - r^{2m})(1 - r)\}^2}{4(1 - r^{2m})^2 (1 - r)[1 + (1 - 2\beta) r]}. \tag{9''}$$

Условимся обозначать через $\tilde{R}$ (или $\tilde{R}[\lambda(r); r_0]$) класс регулярных в E функций $\psi(z)$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$, для которых $z\psi'(z) \in R[\lambda(r), r_0]$.

Рассмотрим классы $C(\tilde{R}, R_1)$ регулярных в E функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$f'(z) = \psi'(z) g(z), \tag{10}$$

где $\psi(z) \in \tilde{R}[\lambda(r); r_0]$, а $g(z) \in R_1[\sigma(r; m; \alpha)]$ (здесь $\sigma(r; m; \alpha)$ определяется неравенством (4) или (5)).

Пусть $f(z) \in C(\tilde{R}, R_1)$ и $\tilde{\tau}$ — граница выпуклости рассматриваемого класса.

Полагая

$$F(z) = zf'(z), \tag{11}$$

и используя формулу (10), имеем: $F(z) = z\psi'(z) g(z) = \varphi(z) g(z)$, где $\varphi(z) \in R[\lambda(r); r_0]$, а $g(z) \in R_1[\sigma(r; m; \alpha)]$.

Легко видеть, что $F(z) \in Q(R, R_1)$. Если τ — граница звездности класса $Q(R, R_1)$, то, учитывая равенство $\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$, получаем $\tau = \tilde{\tau}$.

Таким образом, границы звездности классов $Q(R, R_1)$ переходят в границы выпуклости для соответствующих классов $C(\tilde{R}, R_1)$. Принимая все это во внимание, из теоремы 1 [1] получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если классы* $R[\lambda(r); r_0]$ *и* $R_1[\sigma(r; m; \alpha)]$ *согласованные, то границей выпуклости* $\tilde{\tau}$ *класса* $C(\tilde{R}, R_1)$ *является единственный на* $(0; 1)$ *корень уравнения* $\lambda(r) + \sigma(r; m; \alpha) = 0$. *Если число* $\tilde{\tau}$ *обладает J-свойством, то оно равно также радиусу однолистности этого класса.*

Из теоремы 3 можно получать различные следствия, выбирая в качестве $\tilde{R}$ и R_1 специальные классы регулярных в E функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зморович В. А. О границах звездности и однолистности некоторых классов функций, регулярных в круге $|z| < 1$.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 3, с. 28—39.
2. Зморович В. А. Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій.— Допов. АН УРСР, 1965, № 8, с. 980—984.

Кубанский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.I.1978 г.