УДК 517.53

В. А. Зморович, В. А. Похилевич

Об α—выпуклых функциях при $\alpha < 0$

1. Классом α-выпуклых (иногда называют α-звездных) функций при $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ называется класс M_α регулярных в круге $E = \{z, |z| < 1\}$ функций $F(z)$, $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, удовлетворяющих в E двум условиям:

1) $F(z) \cdot F'(z)/z \neq 0$;

2) $\operatorname{Re} I(\alpha, F(z)) > 0$,

где $I(\alpha, F(z)) = (1-\alpha)\dfrac{zF'(z)}{F(z)} + \alpha\left(1 + \dfrac{zF''(z)}{F'(z)}\right)$.

Из результатов [1 — 4] следует, что функции класса M_α, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, однолистны и звездообразны в E, т. е. $M_\alpha \subset S^*$.

В работе [5] доказано, что при $\alpha \geqslant 0$ решение дифференциального уравнения

$$I(\alpha, F(z)) = q(z), \tag{1}$$

где $q(z) \in P$ $(q(0) = 1,\ \operatorname{Re} q(z) > 0$ в $E)$, всегда определяет функцию $F(z) \in M_\alpha$.

Аналогичное утверждение доказано и для $\alpha \leqslant -2$ в [6]. Это дало возможность доказать, что порядок звездности класса M_α при $\alpha \leqslant -2$ равен нулю. В данном сообщении рассматривается оставшийся неисследованным более сложный случай $-2 < \alpha < 0$, когда, как оказывается, подкласс тех функций $q(z) \in P$, для которых дифференциальное уравнение (1) определяет функции класса M_α, не совпадает со всем классом P. В этом случае также удалось доказать, что порядок звездности класса M_α равен нулю.

2. Полагая $w(z) = zF'(z)/F(z)$ и заменяя α на $(-\alpha)$, уравнение (1) преобразовываем к виду

$$w(z) - \alpha\frac{zw'(z)}{w(z)} = q(z). \tag{2}$$

Здесь $w(0) = 1$, а $q(z) \in P$, $\alpha > 0$. Отметим прежде всего то, что если $w(z)$ — регулярное решение уравнения (2) в E, то $\operatorname{Re} w(z) > 0$ в E. Действительно, полагая $u(r, \theta) = \operatorname{Re} w(z)$, $v(r, \theta) = \operatorname{Im} w(z)$, $u_1(r, \theta) = \operatorname{Re} q(z)$, $z = re^{i\theta}$, из (2) находим

$$u_1(r, \theta) = u(r, \theta) - \alpha\,\frac{ru(r, \theta)\dfrac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} - v(r, \theta)\dfrac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta}}{u^2(r, \theta) + v^2(r, \theta)}.$$

Предположим, что в точке (r, θ) функция $u(r, \theta)$ достигает своего абсолютного минимума на окружности $|z| = r$. Тогда в этой точке $\dfrac{\partial u(r, \theta)}{\partial \theta} = 0$, и

$$u_1(r, \theta) = u(r, \theta)\left[1 - \frac{\alpha r\dfrac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}}{u^2(r, \theta) + v^2(r, \theta)}\right]. \tag{3}$$

Отсюда следует, что $u(r, \theta) \neq 0$, так как $u_1(r, \theta) > 0$, и $w(r, \theta) \neq 0$ — из (2) в предположении регулярности $w(z)$ в E. Так как $u(r, \theta) \neq 0$ в E и $u(r, \theta)$ непрерывна как функция от r, а $u(0, \theta) = 1$, то $u(r, \theta) > 0$.

Итак, если дифференциальное уравнение (2) при некоторой заданной функции $q(z) \in P$ имеет регулярное в E решение $w(z)$, $w(0) = 1$, то $\operatorname{Re} w(z) > 0$ и тогда дифференциальное уравнение (1) будет иметь решение $F(z) \in S^*$.

Следовательно, нужно выяснить, при каких функциях $q(z) \in P$ уравнение (2) имеет регулярное решение при заданном $\alpha \in (0, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что из (2) при $\alpha > 1$ следует:

$$w(z) = \frac{v(z)}{1 - v_1(z)}, \tag{4}$$

где

$$v(z) = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{q(zt)-1}{t}\,dt\right), \tag{5}$$

$$v_1(z) = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{v(zt)-1}{t^{1+1/\alpha}}\,dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{6}$$

Функции $v(z)$ и $v_1(z)$ очевидно голоморфны в E, а потому для регулярности $w(z)$ в E необходимо и достаточно, чтобы $1 - v_1(z) \neq 0$, $z \in E$. Последнее неравенство наверное имеет место, если $1 - \operatorname{Re} v_1(z) \neq 0$, $z \in E$. Но согласно (6) очевидно

$$1 - \operatorname{Re} v_1(z) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{|v(zt)|-1}{t^{1+1/\alpha}}\,dt, \text{ а } |v(z)| = \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{\operatorname{Re} q(zt)-1}{t}\,dt\right\}.$$

Пользуясь известной оценкой $\operatorname{Re} q(zt) \geqslant \frac{1-|zt|}{1+|zt|}$, получаем $|v(zt)| \leqslant (1 + |z|t)^{2/\alpha}$. Тогда

$$1 - \operatorname{Re} v_1(z) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{(1+|z|t)^{2/\alpha}-1}{t^{1+1/\alpha}}\,dt. \tag{7}$$

Оценка (7) точная и реализируется функцией $q(z) = (1-z)/(1+z)$, принадлежащей P. Если предположить, что $\alpha \geqslant 2$, то $(1+|z|t)^{2/\alpha} \leqslant 1 + \frac{2}{\alpha}|z|t$ и

$$1 - \operatorname{Re} v_1(z) > \frac{\alpha(\alpha-1)-2}{\alpha(\alpha-1)}. \tag{8}$$

Таким образом, тот же результат, что и в [6], получен другим методом, т. е. в уравнении (2) можно использовать любую функцию $q(z) \in P$ для получения $F(z) \in M_\alpha$ при $\alpha \leqslant -2$. Если предположить, что $1 < \alpha < 2$, то нетрудно убедиться в выполнении неравенства $1 - 1/\alpha \times \int_0^1 \frac{(1+t)^{2/\alpha}-1}{t^{1+1/\alpha}}\,dt < 0$, из которого следует, что при некотором $r_0 \in (0, 1)$, $1 - \operatorname{Re} v_1(r_0) = 0$. Так как при $q(z) = (1-z)/(1+z)$, очевидно $\operatorname{Im} v_1(r_0) = 0$, то $1 - v_1(r_0) = 0$, т. е. $w(z)$ нерегулярна в E, а именно при $1 < \alpha < 2$ не при любой функции $q(z) \in P$ уравнение (2) имеет регулярное решение в E.

Однако, если вместо класса P взять его подкласс $P_\gamma(m)$, функции которого определяются в E разложением вида

$$q(z) = 1 + q_m z^m + q_{m+1} z^{m+1} + \ldots \tag{9}$$

и удовлетворяют там неравенству $\operatorname{Re} q(z) > \gamma$ $(0 \leqslant \gamma < 1)$, то для любого $\alpha \in (0, 2)$ можно указать такие значения m и γ, для которых функции $q(z) \in P_\gamma(m)$ будут определять регулярное решение уравнения (2) по формуле (4).

Действительно, пусть $\alpha \in (0, 2]$ и фиксированно. Тогда существует такое $m > 1$, что

$$\frac{1}{m} < \alpha < \frac{2}{m}. \tag{10}$$

Это следует из неравенств $2/m > 2/(m+1) > 1/m > 1/(m+1)$, где $m \geqslant 1$ — целое число, дающее возможность покрыть полусегмент $(0, 2]$ системой полусегментов $\left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right]$. Фиксируя m, определяем затем γ равенством

$$2(1-\gamma) = m\alpha(m\alpha - 1), \tag{11}$$

определяющим единственное значение $\gamma \in (0, 1)$ при условии (10). Включение $q(z) \in P_\gamma(m)$ равносильно представлению $q(z) = (q_1(z) + h)/(1+h)$, где $h = \gamma/(1-\gamma)$, а $q_1(z) \in P_0(m)$. Так как $\operatorname{Re} q_1(z) \geqslant (1-r^m)/(1+r^m)$, то при $q(z) \in P_\gamma(m)$ вместо (8) получаем неравенство $1 - \operatorname{Re} v_1(z) > \frac{m\alpha(m\alpha-1) - 2(1-\gamma)}{m\alpha(m\alpha-1)}$, из которого на основании (11) следует $1 - \operatorname{Re} v_1(z) > 0$. Так как функция $q_0(z) = \frac{(1+z^m)/(1-z^m) + h}{1+h} \in P_\gamma(m)$, то, полагая в (5) $q(z) = q_0(z)$, согласно (4) получаем функцию $w_0(z)$, для которой $\lim\limits_{r\to 1} w_0(r) = 0$, т. е. порядок звездности класса M_α при $\alpha \in [-2, 0)$ равен нулю. Из предыдущего анализа вытекают следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $-\frac{1}{m} > \alpha \geqslant -\frac{2}{m}$, $m \geqslant 1$ — целое число, $2(1-\gamma) = m|\alpha|(m|\alpha| - 1)$, *то при* $q(z) \in P_\gamma(m)$ *в* (2) *дифференциальное уравнение* (1) *определяет функцию* $F(z) \in M_\alpha$, *причем* $F(z) \in S^*$ *(более точно* $F(z) \in S^*_\gamma(m)$*).*

Теорема 2. *При* $\alpha \in [-2, 0)$ *порядок звездности класса* M_α *в* E *равен* 0.

Примечание 1. Следует заметить, что класс $P_\gamma(m)$ не исчерпывает всех функций класса P, определяющих функции класса M_α согласно уравнению (1).

Вопрос об объеме класса допустимых функций в классе P при $\alpha \in [-2, 0)$ остается открытым.

Примечание 2. При $\alpha > 0$ уравнение $w(z) + \frac{\alpha z w'(z)}{w(z)} = q(z)$ имеем решение $w(z) = \frac{\alpha v(z)}{\int\limits_0^1 \frac{v(zt)}{t^{1-1/\alpha}}\, dt}$, где $v(z) = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1 \frac{q(zt)-1}{t}\, dt\right)$.

При $\alpha > 0$ нетрудно доказать, что решение $w(z)$ регулярно в E при любой заданной функции $q(z)$, $q(0) = 1$, $\operatorname{Re} q(z) > 0$ в E и, следовательно, $\operatorname{Re} w(z) > 0$ в E.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mocanu P. T. Une propriete de convexité généralisee dans la theorie de la representation conforme.— Mathematica. 1969, **11**, N 1, p. 127—133.
2. Mocanu P. T., Reade M. O. On generalized convexity in conformal mappings.— Rev. roumaine math pures et appl., 1971, **16**, N 10, p. 1541—1544.
3. Miller S. S., Mocanu P. T., Reade M. O. All α-convex functions are starlike.— Rev. roumaine math. pures et appl., 1972, **17**, N 9, p. 1395—1397.
4. Miller S. S., Mocanu P. T., Reade M. O. All α-convex functions are univalent and starlike.— Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **37**, N 2, p. 553—554.
5. Зморович В. А., Якубенко А. А. Об одном обобщении класса α-выпуклых функций Мокану.— В кн.: Мат. сборник, Киев: Наук. думка, 1976, с. 254—257.
6. Зморович В. А., Коробкова И. К. О порядке звездности класса α-выпуклых функций при $\alpha \leqslant -2$.— В кн.: Мат. анализ и теория вероятностей, Киев: Наук. думка, 1978, с. 63—66.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
18.XI.1977 г.