УДК 517.946

С. В. Зубарев

К необходимым условиям оптимальности для некоторых систем с распределенными параметрами

Оптимальными задачами, описываемыми уравнениями гиперболического типа, занимались многие авторы (см., например, монографии [1—4] и библиографию в них). В частности, в работах [2, 5] устанавливаются необходимые условия оптимальности для линейных колебательных систем. Предлагаемая работа — некоторое обобщение указанных исследований систем квазилинейных уравнений с начально-краевыми условиями. В качестве примера задач такого рода здесь выводятся необходимые условия оптимальности объемных и начально-краевых управлений в оптимальной задаче, описываемой системой уравнений второго порядка.

Итак, пусть управляемый процесс описывается системой уравнений

$$u^i_{tt} - L^i u^i = f^i(x, t, u, v) \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$u^i|_{t=0} = \varphi_i(x, v^1(x)), \quad u^i_t|_{t=0} = \psi_i(x, v^2(x)),$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial N} + \sigma_i u^i|_\Gamma = \mu_i(t, x, v^3(x, t))|_\Gamma \tag{2}$$

в области $G: [0, T] \times \Omega(x)$, где Ω — некоторая ограниченная область m-мерного пространства с кусочно-гладкой границей Γ, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$; $\dfrac{\partial u^i}{\partial N} = \sum\limits_{k=1}^{m} A^i_{jk} \dfrac{\partial u^i}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j)$; ν — внешняя (по отношению к области) нормаль к поверхности Γ. Предполагаем, что оператор

$$L^i u^i = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^i_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x_k}\right) - q(x) u^i, \quad q(x) \geqslant 0,$$

эллиптический с непрерывно-дифференцируемыми коэффициентами A^i_{jk}. Здесь $u = \{u^1, \ldots u^n\}$, $\mu'_i = \{\mu^1_i, \ldots, \mu^d_i\}$, $v = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $v^1 = \{v^1_1, \ldots, v^1_{r_1}\}$, $v^2 = \{v^2_1, \ldots, v^2_{r_2}\}$, $v^3 = \{v^3_{r_3} d\}$, где v^3 — матрица размера $r_3 \times d$, d — некоторое конечное число угловых точек границы Γ. Знак «$'$» обозначает транспонирование. За классы допустимых управлений v, v^1, v^2 и v^3 принимаем соответственно классы кусочно-гладких и гладких функций, определенных в области G и $\partial G / \partial G$ — граница G), принимающие значения в некоторых ограниченных областях V, V^1, V^2, V^3 r, r_1, r_2, $r_3 \times d$-мерных евклидовых пространств. Функции f^i имеют ограниченные производные f^i_{xt}, f^i_{uu} в области G и удовлетворяют условию Липшица по v. На функции φ_i и ψ_i накладываются обычные условия задачи Коши по переменной x, кроме того, они удовлетворяют условию Липшица по v^1, v^2. Функции μ_i дважды непрерывно дифференцируемы, вторые производные удовлетворяют условию Липшица по v^3, как и сами функции. Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_\Omega f_0(x, T, u, u_t)\, d\Omega + \iint_G F(x, t, u, u_x, u_t, u_{tt}, v)\, dG, \tag{3}$$

где функции f_0 и F имеют ограниченные вторые производные по всем аргументам и выполнены условия

$$f_{0u_tu_t} \geqslant 0,\ F_{u_tu_t} \geqslant 0,\ F_{u_xu_x} \geqslant 0,\ F_{u_{tt}u_{tt}} \geqslant 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы функционал I достигал своего наименьшего значения, необходимо, чтобы почти всюду выполнялись соотношения*

$$H(x, t, u, w, v)\ ((=))\ \sup_{v \in V} H(x, t, u, w, v),$$

$$H^1\left(x, \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}, v^1\right)((=))\ \inf_{v^1 \in V^1} H^1\left(x, \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}, v^1\right),$$

$$H^2(x, w|_{t=0}, v^2)\ ((=))\ \sup_{v^2 \in V^2} H^2(x, w|_{t=0}, v^2),$$

$$H^3(t, x, w, v^3)|_\Gamma\ ((=))\ \sup_{v^3 \in V^3} H^3(t, x, w, v^3)|_\Gamma,$$

где функции H, H^1, H^2, H^3 определяются равенствами

$$H = -F + \sum_{i=1}^{n} w_i f^i(x, t, u, v),$$

$$H^1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i_{tt}}\right) - \frac{\partial F}{\partial u^i_t}\right]\Big|_{t=0} \varphi_i(x, v^1),$$

$$H^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[w_i + \frac{\partial F}{\partial u^i_{tt}}\right]\Big|_{t=0} \psi_i(x, v^2),\ H^3 = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu^i(t, x, v^3)|_\Gamma.$$

Функции $w_i(x, t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$w_{itt} - L^i w_i = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f^p}{\partial u^i} w_p - \frac{\partial F}{\partial u^i} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i_t}\right) + \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i_{x_k}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i_{tt}}\right) \tag{4}$$

с начально-краевыми условиями:

$$w_i|_{t=T} = -\left[\frac{\partial f_0}{\partial u^i_t} + \frac{\partial F}{\partial u^i_{tt}}\right]\Big|_{t=T},$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}\Big|_{t=T} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial u^i} + \frac{\partial F}{\partial u^i_t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i_{tt}}\right)\right]\Big|_{t=T}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial N} + \sigma_i w_i/_\Gamma = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial u^i_{x_k}}\Big|_\Gamma \cos(\nu, x_k).$$

Доказательство проводится методом приращений, аналогично приведенному в работе [6]. Покажем оценку остаточного члена в формуле приращения соответствующего функционала. Рассмотрим наряду с управлением $\bar{v}$ еще одно допустимое управление $\bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta\bar{v}$, $\bar{v} = (v, v^1, v^2, v^3)$. Ему будет соответствовать решение $\bar{u} = u + \Delta u$. Оценим $|\Delta u|$ через $|\Delta v|$. Для этого представим приращение решений (1), (2) в виде ряда

$$\Delta u^i(x, t) = \Phi_i(x, t) + \sum_{n}^{\infty} h^i_n X^i_n(x), \tag{6}$$

где X_n^i — собственные функции краевой задачи

$$\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}^i \frac{\partial X_n^i}{\partial x_k}\right) - q(x) X_n^i + \nu_n^i X_n^i = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial X_n^i}{\partial N} + \sigma_i X_n^i|_\Gamma = 0,$$

а функция $\Phi_i(x, t)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial N} + \sigma_i \Phi_i|_\Gamma = \Delta\mu_i(x, t, v^3)|_\Gamma.$$

При достаточно общих предположениях на параметры уравнения установлена разрешимость такой задачи (см., например, [7, 8]). Собственные числа ν_n^i представляют собой некоторую положительную функцию от n, $y^i(n) \to \infty$, $n \to \infty$, поэтому из последовательности $\{y^i(n)\}_n$ можно выбрать подпоследовательность $\{y^i(n_k)\}_k$ такую, чтобы члены этой подпоследовательности удовлетворяли равенству $y^i(n_k) = q_k^2 + \alpha C_k$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $C_k \geqslant 0$, где q_k — натуральные числа. Считаем, что разложение в ряд (6) ведется по собственным функциям, соответствующим так выбранным собственным числам. Подставим ряд (6) в i-е уравнение приращения Δu_i и получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $h_n^i(t)$. Решение n_k-го уравнения можно записать в интегральной форме, где правые части будут содержать приращения функций Δf^i, $\Delta\varphi_i$, $\Delta\psi_i$, $\Delta\mu_i$ и вторые — производные от $\Delta\mu_i$. Так как указанные функции удовлетворяют условию Липшица u и v, то, суммируя их по i и по n_k с учетом сходимости ряда $\sum_{i=1}^{n} \sum_{n_k=1}^{\infty} K/\nu_{n_k}^i$, $K = \text{const} > 0$, получаем неравенства относительно приращений Δu и Δv. Применив к ним лемму Гронуолла — Беллмана, окончательно получим следующие оценки:

$$|\Delta u^i(x, t)| \leqslant R\left[\iint_G\int (|\Delta v| + |\Delta v^3|)\, dG + \int_\Omega (|\Delta v^1| + |\Delta v^2|)\, d\Omega + |\Delta v^3|\right], \quad R > 0.$$

Выбирая многомерные игольчатые вариации для Δv, Δv^1, Δv^2 и обычную вариацию для Δv^3 ($\Delta v^3 = \varepsilon\delta v^3$, где δv^3 — некоторая гладкая функция, а $\varepsilon > 0$), докажем, что остаточный член — величина высшего порядка малости, чем соответствующие приращения гамильтонианов H, H^1, H^2, H^3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л. Приложения теории оптимального управления системами.— М: Мир, 1977.— 142 с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем.— М.: Мир, 1975.— 184 с.
3. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики.— М.: Наука, 1975.— 478 с.
4. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1977.— 480 с.
5. Russel D. L. Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with finite dimensional controls.— SIAM J. Control, 1966, **4**, N 2, p. 276—294.
6. Егоров А. И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, **29**, № 6, с. 1205—1260.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1966.— 798 с.
8. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения.— М.: Гостехиздат, 1953.— 279 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 14.11.1978 г.,
после переработки — 29.XI.1978 г.