УДК 519.44+517.949.21

В. Е. Слюсарчук

Обратимость почти периодических операторов, порожденных дискретными системами

Пусть G — группа, элементы которой — последовательности $n = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots \rangle$, где $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ — целые вещественные числа и $\lim\limits_{p\to\infty} n_p = 0$, с операцией сложения $n + m = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots \rangle + \langle m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots \rangle = \langle n_1 + m_1, n_2 + m_2, \ldots, n_p + m_p, \ldots \rangle$; E — конечномерное вещественное или комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$; $\mathfrak{M}(G, E)$ — пространство ограниченных на G E-значных функций $x = x(n)$ с нормой $\|x\|_{\mathfrak{M}(G,E)} = \sup\limits_{n\in G} \|x(n)\|_E$. Определим оператор $T_m : \mathfrak{M}(G, E) \to \mathfrak{M}(G, E)$ равенством $(T_m x)(n) = x(n + m)$. Очевидно, что $T_m^{-1} = T_{-m}$ и $\|T_m\|_{[\mathfrak{M}(G,E)]} = 1$, где $\|\cdot\|_{[\mathfrak{M}(G,E)]}$ — норма в $[\mathfrak{M}(G, E)]$-пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{M}(G, E)$.

Оператор $\mathfrak{A} \in [\mathfrak{M}(G, E)]$ назовем *почти периодическим*, если область значений оператор-функции $\mathfrak{A}(m) = T_m \mathfrak{A} T_{-m}$ $(m \in G)$ компактна в $[\mathfrak{M}(G, E)]$. Если $T_m \mathfrak{A} T_{-m} = \mathfrak{A} \forall m \in G$, то оператор $\mathfrak{A}$ назовем *автономным*. Пусть $S_p(a, m) = \{n : n = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p, 0, 0, \ldots \rangle \in G, \ |n_1 - m_1| + \ldots + |n_p - m_p| \leqslant a\}$ $(m = \langle m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots \rangle \in G)$. Оператор $\mathfrak{A} \in [\mathfrak{M}(G, E)]$ назовем *с-непрерывным*, если для каждого $p \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдутся такие $\delta > 0$, $N > 0$, что из неравенства $\|x(n)\|_E < \delta$ при $n \in S_p(N, 0)$ и $\|x\|_{\mathfrak{M}(G,E)} \leqslant 1$ следует неравенство $\|(\mathfrak{A}x)(n)\|_E < \varepsilon$ при $n \in S_p(T, 0)$.

Отметим, что к элементам пространства $[\mathfrak{M}(G, E)]$ приходим при рассмотрении линейных дискретных систем и, в частности при рассмотрении разностных уравнений.

Объект исследования данной работы — задача об обратимости c-непрерывного почти периодического оператора $\mathfrak{A}$. Этой задаче посвящено много работ (см., например, [1—6]). В работах [1—3] исследовались почти периодические разностные операторы, в работах [4—5] — автономные разностные операторы (случай $\dim E = \infty$), в [6] — автономные операторы $\mathfrak{A} \in [\mathfrak{M}(G, E)]$. Для дифференциальных уравнений аналогичные вопросы рассматривались в работе [7].

Обозначим через $H(\mathfrak{A})$ замыкание области значений оператор-функции $\mathfrak{A}(m) = T_m \mathfrak{A} T_{-m}$ в $[\mathfrak{M}(G, E)]$.

Отметим некоторые свойства почти периодического оператора:

а) для любого $\widetilde{\mathfrak{A}} \in H(\mathfrak{A})$ вектор-функция $y(n) = (\widetilde{\mathfrak{A}}x)(n)$ почти периодична, если $x(n)$ почти периодична;

б) для любого $\varepsilon > 0$ и целого числа $p > 0$ существует такое число $a(\varepsilon, p)$, что в любом множестве $S_p(a(\varepsilon, p), m)$ найдется элемент $k = \langle k_1, k_2, \ldots, k_p, 0, 0, \ldots \rangle$ $(k_1, k_2 \ldots k_p \neq 0)$, при котором $\|\mathfrak{A}(s) - \mathfrak{A}\|_{[\mathfrak{M}(G,E)]} < \varepsilon$ $\forall s \in M_p(k)$, где $M_p(k)$ — множество, элементы которого — векторы k, $k^{(1)} = \langle k_1, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$, $k^{(2)} = \langle 0, k_2, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle, \ldots, k^{(p)} = \langle 0, \ldots, 0, k_p, 0, \ldots \rangle$ и всевозможные суммы двух, трех, $\ldots$, p различных векторов из совокупности $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(p)}$;

в) из c-непрерывности оператора $\mathfrak{A}$ следует c-непрерывность любого оператора $\widetilde{\mathfrak{A}} \in H(\mathfrak{A})$.

Обозначим через $\operatorname{Ker} \mathfrak{A}$ ядро оператора $\mathfrak{A}$, а через θ нулевой элемент пространства $\mathfrak{M}(G, E)$.

Теорема. *Пусть почти периодический оператор $\mathfrak{A}$ с-непрерывен и $\operatorname{Ker} \widetilde{\mathfrak{A}} = \theta \forall \widetilde{\mathfrak{A}} \in H(\mathfrak{A})$. Тогда оператор $\mathfrak{A}$ имеет почти периодический непрерывный обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$.*

Доказательство теоремы проведем с использованием методики исследования дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, предложенной в работе [7].

Пусть $\{\omega(i) = \langle \omega_1(i), \ldots, \omega_{p(i)}(i), 0, 0, \ldots \rangle\}$ $(\omega_1(i) > 1, \ldots, \omega_{p(i)}(i) > 1;$ $\lim\limits_{i\to\infty} p(i) = \infty$, $\lim\limits_{i\to\infty} \omega_k(i) = \infty \forall k > 0)$ — такая последовательность, что

$$\lim_{i\to\infty} \max_{s\in M_{p(i)}(\omega(i))} \| T_s \mathfrak{A} T_{-s} - \mathfrak{A} \|_{[\mathfrak{M}(G,E)]} = 0. \tag{1}$$

Существование такой последовательности вытекает из свойства б).

В $\mathfrak{M}(G, E)$ рассмотрим подпространство $\mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$ функций $\alpha(n)$, для которых $\alpha(n) = \alpha(n+s) \forall s \in M_{p(i)}(\omega(i))$.

Обозначим $\Pi_{\omega(i)} = \{n : n = \langle n_1, \ldots, n_p, \ldots \rangle \in G; \quad n_k \in [0, \omega_k(i)], \quad k = \overline{1, p(i)}\}$, $K_{\omega(i)} = \{n : n = \langle n_1, \ldots, n_p, \ldots \rangle \in G; \ n_k \in [1, \omega_k(i)], \ k = \overline{1, p(i)}\}$. Определим отображение $g_i : \Pi_{\omega(i)} \to K_{\omega(i)}$ равенством

$$g_i(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \in K_{\omega(i)}, \\ n + \sum\limits_{q=1}^{p(i)} \chi_q(n)\, \omega^{(q)}(i), & \text{если } n \in \Pi_{\omega(i)} \diagdown K_{\omega(i)}, \end{cases}$$

где $\chi_q(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_q = 0, \\ 0, & \text{если } n_q \neq 0, \end{cases}$ $\omega^{(1)}(i) = \langle \omega_1(i), 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$, $\omega^{(2)}(i) = \langle 0, \omega_2(i), 0, \ldots, 0, \ldots \rangle, \ldots, \omega^{(p(i))}(i) = \langle 0, \ldots, 0, \omega_{p(i)}(i), 0, \ldots \rangle$, и операторы $\mathfrak{A}_i$ — равенством $(\mathfrak{A}_i x)(n) = y(n)$, где функция $y(n)$, принадлежащая $\mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$, определена на множестве $\Pi_{\omega(i)}$ равенством $y(n) = (\mathfrak{A}x)(g_i(n))$. Используя условия (1), после некоторых выкладок находим, что операторы $\mathfrak{A}_i$ в подпространстве $\mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{\|x_i\|_{\mathfrak{M}(G,E)}=1} \sup_{n\in Q_{\omega(i)}} \| (\mathfrak{A}_i x_i)(n) - (\mathfrak{A} x_i)(n) \|_E = 0, \tag{2}$$

где $Q_{\omega(i)} = \{n : n = \langle n_1, \ldots, n_p, \ldots \rangle \in G, \ n_k \in [-\omega_k(i), \omega_k(i)], \ k = \overline{1, p(i)}\}$.

Рассмотрим уравнение

$$(\mathfrak{A}_i x_i)(n) = f_i(n), \tag{3}$$

где $f_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$. Покажем, что при достаточно больших i уравнение (3) имеет единственное решение $x_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$ для каждой функции $f_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$, причем справедливо неравенство

$$\| x_i \|_{\mathfrak{M}(G,E)} \leqslant d \, \| f_i \|_{\mathfrak{M}(G,E)}, \tag{4}$$

где постоянная d не зависит от i.

Действительно, задачу о существовании решений $x_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$ уравнения (3) можно, очевидно, свести в силу $\dim E < \infty$ к системе из $\omega_1(i)\,\omega_2(i) \ldots \omega_{p(i)}(i) \dim E$ линейных уравнений с $\omega_1(i)\,\omega_2(i) \ldots \omega_{p(i)}(i) \dim E$ неизвестными для каждых фиксированных $n_{p(i)+1}, n_{p(i)+2}, \ldots$ $(n = \langle n_1, \ldots, n_{p(i)}, n_{p(i)+1}, n_{p(i)+2}, \ldots \rangle \in G)$. Поэтому если бы сформулированное выше утверждение было неверно, то нашлись бы последовательность чисел $\{i_k\}$ и последовательность функций $x_{i_k}(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i_k)}(G, E)$ $(\| x_{i_k} \|_{\mathfrak{M}(G,E)} = 1)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \| \mathfrak{A}_{i_k} x_{i_k} \|_{\mathfrak{M}(G,E)} = 0. \tag{5}$$

Существуют такие элементы $t_k = \langle \tau_1, \ldots, \tau_p, \ldots \rangle \in G$, что $\| x_{i_k}(t_k) \|_E \geqslant \frac{1}{2}$.

Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что последовательность операторов $T_{t_k} \mathfrak{A} T_{-t_k}$ сходится к некоторому оператору

$\tilde{\mathfrak{A}} \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})$. Из неравенств

$$\sup_{n \in Q_{\omega(i_k)}} \| (T_{t_k} \mathfrak{A}_{i_k} x_{i_k})(n) - (\tilde{\mathfrak{A}} T_{t_k} x_{i_k})(n) \|_E \leqslant \sup_{n \in Q_{\omega(i_k)}} \| [T_{t_k} (\mathfrak{A}_{i_k} - \mathfrak{A}) x_{i_k}](n) \|_E +$$

$$+ \sup_{n \in Q_{\omega(i_k)}} \| (T_{t_k} \mathfrak{A} x_{i_k})(n) - (\tilde{\mathfrak{A}} T_{t_k} x_{i_k})(n) \|_E \leqslant \sup_{n \in Q_{\omega(i_k)}} \| [(\mathfrak{A}_{i_k} - \mathfrak{A}) x_{i_k}](n) \|_E +$$

$$+ \| (T_{t_k} \mathfrak{A} T_{-t_k} - \tilde{\mathfrak{A}}) T_{t_k} x_{i_k} \|_{\mathfrak{M}(G,E)}$$

в силу (2) имеем

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \in Q_{\omega(i_k)}} \| (T_{t_k} \mathfrak{A}_{i_k} x_{i_k})(n) - (\tilde{\mathfrak{A}} y_k)(n) \|_E = 0, \tag{6}$$

где $y_k(n) = x_{i_k}(n + t_k)$.

В силу ограниченности последовательности функций $y_k(n) = x_{i_k}(n+t_k)$ можно считать, не ограничивая общности доказательства, что $y_k(n)$ при $k \to \infty$ сходится к некоторой ненулевой функции $\tilde{y}(n)$ $\left(\tilde{y}(0) \geqslant \frac{1}{2}\right)$ на каждом конечном множестве $S_p(T, 0)$. Тогда $\| (\tilde{\mathfrak{A}} \tilde{y})(n) \|_{\mathfrak{M}(G,E)} = 0$, что следует из соотношений (5), (6) и c-непрерывности оператора $\tilde{\mathfrak{A}}$, т. е. $\tilde{y}(n) \in \operatorname{Ker} \tilde{\mathfrak{A}}$. Это противоречит нашему предположению. Таким образом, уравнение (3) для каждой функции $f_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$ при достаточно больших i имеет единственное решение $x_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$, удовлетворяющее неравенству (4).

Покажем, что уравнение

$$(\mathfrak{A} x)(n) = f(n) \tag{7}$$

для каждой функции $f(n) \in \mathfrak{M}(G, E)$ имеет решение $x(n) \in \mathfrak{M}(G, E)$. Пусть $\{f_i(n)\}$ — последовательность функций, сходящаяся к $f(n)$ на каждом конечном множестве $S_p(T, 0)$ и такая, что $f_i(n) \in \mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$, $\| f_i \|_{\mathfrak{M}(G,E)} \leqslant \| f \|_{\mathfrak{M}(G,E)}$ для каждого i. Пусть $x_i(n)$ — решение уравнения (3), принадлежащее $\mathfrak{M}_{\omega(i)}(G, E)$. Тогда согласно (4) последовательность функций $x_i(n)$ ограничена. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_i(n)\}$ сходится на каждом ограниченном множестве $S_p(T, 0)$ к некоторой функции $\tilde{x}(n)$. Из c-непрерывности оператора $\mathfrak{A}$ и соотношения (2) следует, что $(\mathfrak{A}\tilde{x})(n) = f(n)\ \forall n \in G$, т. е. $\tilde{x}(n)$ — решение уравнения (7).

Из доказанного и $\operatorname{Ker} \mathfrak{A} = \theta$ согласно теореме Банаха [8] следует, что оператор $\mathfrak{A}$ имеет непрерывный обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$.

Из ограниченности множества значений оператор-функции $\mathfrak{S}(m) = T_m \mathfrak{A}^{-1} T_{-m}$ в $[\mathfrak{M}(G, E)]$ и компактности в $[\mathfrak{M}(G, E)]$ области значений опоратор-функции $T_m \mathfrak{A} T_{-m}$ вытекает почти периодичность оператора $\mathfrak{A}^{-1}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из утверждения теоремы и свойства б) следует, что решение $x(n) = (\mathfrak{A}^{-1} f)(n)$ уравнения (7) почти периодично, если функция $f(n)$ почти периодична.

З а м е ч а н и е 2. Доказанная теорема усиливает и обобщает известную теорему Фавара [9] в случае разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Х а л а н а й А., В е к с л е р Д. Качественная теория импульсных систем.— М.: Мир, 1971.— 307 с.
2. М а р т ы н ю к Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1972.— 248 с.

3. С л ю с а р ч у к В. Е., Я с к о Ф. Ф. Почти периодические разностные системы.— ВИНИТИ, деп. № 2459—76.
4. С л ю с а р ч у к В. Е. Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве.—Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 6, с. 503—509.
5. С л ю с а р ч у к В. Е. Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве.— В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений,Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 147—156.
6. С л ю с а р ч у к В. Е. Обобщение теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье и его применение к исследованию бесконечномерных дискретных систем.— Весці АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1977, № 2, с. 23—26.
7. М у х а м а д и е в Э. Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций.— Мат. заметки, 1972, **11**, № 3, с. 269—274.
8. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.— 496 с.
9. Л е в и т а н Б. М. Почти-периодические функции.— М.: Гостехиздат, 1953.— 396 с.

Украинский институт
инженеров водного хозяйства

Поступила в редакцию
29.XI.1977 г.