УДК 517.5

С. В. Переверзев

Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на одном классе функций двух переменных

В работе [1] получены точные значения приближения интерполяционными эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций одной переменной. В данной работе некоторые из этих результатов обобщаются на случай функций двух действительных переменных.

1. Постановка задачи. Обозначим через $C^{\vec{s}}$ ($\vec{s} = (s_1, s_2)$, $s_i = 0, 1, \ldots;$ $i = 1, 2$) линейное пространство функций $f(x, y)$, имеющих на квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ непрерывные частные производные $f^{(s_1, s_2)}$. Пусть $\vec{l} = (l_1, l_2)$ ($l_i = 0, 1, \ldots;$ $i = 1, 2$) и $\Delta_{l_1} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{l_1} = 1\}$, $\Delta_{l_2} = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{l_2} = 1\}$, $\Delta_{\vec{l}} = \Delta_{l_1} \times \Delta_{l_2}$ — соответственно произвольные разбиения множеств $[0, 1]$ и Q, $h_{1i} = x_i - x_{i-1}$, $h_{2j} = y_j - y_{j-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$), $|\Delta_{\vec{l}}|_i = |\Delta_{l_i}| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant l_i} h_{ik}$.

Обозначим $\vec{r} = (r_1, r_2)$ ($r_i = 1, 2, \ldots, r_i < s_i$, $i = 1, 2$) и поставим в соответствие каждой функции $f \in C^{\vec{s}}$ функцию $S_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y)$, называемую в дальнейшем двумерным эрмитовым сплайном, удовлетворяющую следующим условиям:

1) на каждом множестве $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

$$S_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{2r_1+1} \sum_{n=0}^{2r_2+1} S_{knij} x^k y^n;$$

2) имеют место равенства

$$S_{\vec{r}, \vec{l}}^{(m_1, m_2)}(f; x_i, y_j) = f^{(m_1, m_2)}(x_i, y_j),$$

$$m_k = 0, 1, 2, \ldots, r_k, \ k = 1, 2, \ i = 0, 1, \ldots, l_1; \ j = 0, 1, \ldots, l_2.$$

Отметим, что условиями 1) и 2) функция $S_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y)$ определяется однозначно (см., например, [2]). Кроме того, легко видеть, что $S_{\vec{r}, \vec{l}} \in C^{\vec{r}}$.

Введем в рассмотрение функцию $e_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y) = f(x, y) - S_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y)$. Пусть $M \subset C^{\vec{s}}$. Всюду в дальнейшем полагаем $r_i = [s_i/2]$, $i = 1, 2$. Задача состоит в отыскании величины

$$E(M; \Delta_{\vec{l}})_X = \sup_{f \in M} \| e_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y) \|_X, \tag{1}$$

где X — нормированное пространство $C(Q)$ или $L_p(Q)$.

Обозначим через $W_M^{\vec{p}}$ ($\vec{p} = (p_1, p_2)$, $p_i = 0, 1, \dots, i = 1, 2$) класс функций, у которых $f^{(p_1,0)}$, $f^{(0,p_2)}$, $f^{(p_1,p_2)}$ существуют, кусочно-непрерывны и

$$\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}} \left| \int_0^1 f^{(p_1,0)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 1, \quad \underset{y\in[0,1]}{\mathrm{vraisup}} \left| \int_0^1 f^{(0,p_2)}(x, y)\, dx \right| \leqslant 1,$$

$$\underset{(x,y)\in Q}{\mathrm{vraisup}} | f^{(p_1,p_2)}(x, y) | \leqslant 1.$$

Пусть

$$\widetilde{W}_M^{\vec{p}} = \{f : f \in W_M^{\vec{p}},\ f^{(i,j)}(x, 0) = f^{(i,j)}(x, 1),\ f^{(i,j)}(0, y) = f^{(i,j)}(1, y);$$
$$i = 0, 1, \dots, p_1,\ j = 0, 1, \dots, p_2\}.$$

В данной работе находим величину $E(\widetilde{W}_M^{\vec{p}}, \Delta_{\vec{l}})_C$ при четных p_1 и p_2.

2. Интегральное представление $e_{\vec{r},\vec{l}}$. Рассмотрим функцию (см. [1])

$$H_k(z) = H_{k,r}(h, z) = \begin{cases} \dfrac{(h-z)^{r+1}}{k!\ r!} \displaystyle\sum_{s=0}^{r-k} \dfrac{(r+s)!}{s!\, h^{r+s+1}} z^{k+s}, & z \in [0, h], \\ 0, & z \overline{\in} [0, h], \end{cases}$$
$$k = 0, 1, \dots, r.$$

Имеют место равенства

$$H_k^{(i)}(0) = \delta_{ki},\ H_k^{(i)}(h) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

где δ_{ki} — символ Кронекера. Из этого свойства и из единственности эрмитового сплайна следует, что для $f \in C^{\vec{s}}$ и $(x, y) \in Q_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, l_1$, $j = 1, 2, \dots, l_2$)

$$S_{\vec{r},\vec{l}}(f; x, y) = \sum_{k,m=0}^{r_1,r_2} [f^{(k,m)}(x_{i-1}, y_{j-1}) H_k(h_{1i}, x - x_{i-1}) H_m(h_{2j},$$
$$y - y_{j-1}) + (-1)^k f^{(k,m)}(x_i, y_{j-1}) H_k(h_{1i}, x_i - x) H_m(h_{2j}, y - y_{j-1}) +$$
$$+ (-1)^m f^{(k,m)}(x_{i-1}, y_j) H_k(h_{1i}, x - x_{i-1}) H_m(h_{2j}, y_j - y) +$$
$$+ (-1)^{m+k} f^{(k,m)}(x_i, y_j) H_k(h_{1i}, x_i - x) H_m(h_{2j}, y_j - y)].$$

Используя известное представление для периодической функции одной переменной (см. [3, с. 20]), для $f \in \widetilde{W}_M^{\vec{p}}$ получаем равенство

$$f(x, y) = \iint_Q f(u, v)\, dudv - \frac{1}{p_1!} \iint_Q \widetilde{B}_{p_1}(x-u) f^{(p_1,0)}(u, v)\, dudv -$$
$$- \frac{1}{p_2!} \iint_Q \widetilde{B}_{p_2}(y-v) f^{(0,p_2)}(u, v)\, dudv +$$
$$+ \frac{1}{p_1!\ p_2!} \iint_Q \widetilde{B}_{p_1}(x-u) \widetilde{B}_{p_2}(y-v) f^{(p_1,p_2)}(u, v)\, dudv,$$

где $\widetilde{B}_{p_1}$ и $\widetilde{B}_{p_2}$ — 1-периодические функции, совпадающие на периоде с полиномами Бернулли соответствующих степеней.

Опуская легко воспроизводимые преобразования, получаем

$$e_{\vec{r},\vec{l}}(f;x,y)=\frac{1}{p_1!\,p_2!}\iint\limits_Q e_{\vec{r},\vec{l}}(\widetilde{B}_{p_1}(x-u)\,\widetilde{B}_{p_2}(y-v);\ x,y)\,f^{(p_1,p_2)}(u,v)\,dudv-$$

$$-\frac{1}{p_1!}\iint\limits_Q e_{\vec{r_1},\vec{l_1}}(\widetilde{B}_{p_1}(x-u);x)\,f^{(p_1,0)}(u,v)\,dudv-$$

$$-\frac{1}{p_2!}\iint\limits_Q e_{r_2,l_2}(\widetilde{B}_{p_2}(y-v);y)\,f^{(0,p_2)}(u,v)\,dudv, \tag{2}$$

где $e_{r_1,l_1}(\varphi(x),x)$, $e_{r_2,l_2}(\psi(y),y)$ — остатки от приближения функций $\varphi(x)$ $\psi(y)$ одномерными эрмитовыми сплайнами по переменным x и y степени $2r_1+1$, $2r_2+1$, построенными соответственно по разбиениям Δ_{l_1}, Δ_{l_2} отрезка $[0,\ 1]$.

Без труда проверяется, что (соответствующие аргументы опущены)

$$e_{\vec{r},\vec{l}}(\widetilde{B}_{p_1}\widetilde{B}_{p_2})=-e_{r_1,l_1}(\widetilde{B}_{p_1})\,e_{r_2,l_2}(\widetilde{B}_{p_2})+\widetilde{B}_{p_1}e_{r_2,l_2}(\widetilde{B}_{p_2})+\widetilde{B}_{p_2}e_{r_1,l_1}(\widetilde{B}_{p_1}).$$

Получим представление для $e_{r_i,l_i}(\widetilde{B}_{p_i})$ $(i=1,2)$. В дальнейшем полагаем, $p_i=2r_i+2$ $(i=1,2)$.

Рассуждая так же, как при получении равенства (2), легко показать, что для любой 1-периодической функции $f(x)$, имеющей (p_1-1)-ю абсолютно непрерывную производную на всей оси, имеет место соотношение

$$e_{r_1,l_1}(f;x)=-\frac{1}{p_1!}\int\limits_0^1 e_{r_1,l_1}(\widetilde{B}_{p_1}(x-u),x)\,f^{(p_1)}(u)\,du. \tag{3}$$

С другой стороны, в [1] показано, что

$$e_{r_1,l_1}(f;x)=\int\limits_0^1 Q_{2r_1+2}(u,x)\,f^{(p_1)}(u)\,du, \tag{4}$$

где при $x\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,l_1)$

$$Q_{2r_1+2}(u,x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{r_1}(-1)^{k+1}\frac{1}{(p_1-k-1)!}(u-x_{i-1})^{p_1-k-1}H_k(h_i,x-x_{i-1}), & x_{i-1}\leqslant u\leqslant x,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{r_1}(-1)^{k+1}\frac{1}{(p_1-k-1)!}(x_i-u)^{p_1-k-1}H_k(h_i,x_i-x), & x<u\leqslant x_i,\\ 0, & u\,\bar{\in}\,[x_{i-1},x_i].\end{cases}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$e_{r_1,l_1}(\widetilde{B}_{p_1}(x-u),x)=-p_1!\ Q_{p_1}(u,x)+\varphi(x), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая функция, не влияющая на значение величины $e_{r_1,l_1}(f;x)$.

Совершенно аналогично устанавливаем, что

$$e_{r_2,l_2}(\widetilde{B}_{p_2}(y-v),y)=-p_2!\ Q_{p_2}(v,y)+\psi(y). \tag{6}$$

Нам потребуются некоторые свойства функции $Q_{2r_1+2}(u, x)$, установленные в [1].

Лемма 1 (см. [1]). *Для любого* $i = 1, 2, \ldots, l_1$

1) $$\max_{u,x\in]x_{i-1},x_i]} |Q_{2r_1+2}(u, x)| = \left| Q_{2r_1+2}\left(x_{i-1} + \frac{h_{1i}}{2},\ x_{i-1} + \frac{h_{1i}}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{h_{1i}^{2r_1+1}}{(2r_1+1)(2r_1!!)^2\, 2^{2r_1+2}};$$

2) $Q_{2r_1+2} \in C(Q)$;

3) $\operatorname{sign} Q_{2r_1+2}(u, x) = (-1)^{r_1+1},\ x_{i-1} < u,\ x < x_i$;

4) *для* $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\int_0^1 Q_{2r_1+2}(u, x)\, du = \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q_{2r_1+2}(u, x)\, du = (-1)^{r_1+1} \frac{(x - x_{i-1})^{r_1+1}(x_i - x)^{r_1+1}}{(2r_1+2)!}.$$

Положим далее $\widehat{B}_{2n}(z) = \widetilde{B}_{2n}(z) - \widetilde{B}_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)$, и пусть b_{2n} — наименьший нуль $\widetilde{B}_{2n}(z)$ на $[0, 1]$. В работе [4] установлено, что

$$b_2 < b_4 < \ldots < b_{2n} < \ldots < \frac{1}{4}. \tag{4}$$

В дальнейшем считаем, что $|\Delta_{l_i}| \leqslant b_{2r_i}$ $(i = 1, 2)$. Из (2), (5) и (6) для $f \in \widetilde{W}_M^{\vec{p}}$ получаем

$$e_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y) = J_1(x) + J_2(y) + J_3(x, y), \tag{8}$$

где

$$J_1(x) = \iint_Q Q_{p_1}(u, x) f^{(p_1,0)}(u, v)\, dudv,\quad J_2(y) = \iint_Q Q_{p_2}(v, y) f^{(0,p_2)}(u, v)\, dudv,$$

$$J_3(x, y) = \iint_Q \varphi(u, x, v, y) f^{(p_1,p_2)}(u, v)\, dudv,$$

$$\varphi(u, x, v, y) = -Q_{p_1}(u, x) Q_{p_2}(v, y) - \frac{\widehat{B}_{p_1}(x-u)}{p_1!} Q_{p_2}(v, y) - \frac{\widehat{B}_{p_2}(y-v)}{p_2!} Q_{p_1}(u, x).$$

Так же, как в [1], при изучении функции $e_{\vec{r}, \vec{l}}(f; x, y)$ вместо $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $y \in [y_{j-1}, y_j]$ можно полагать, что $x \in [0, h_{1i}]$, $y \in [0, h_{2j}]$.

3. Основной результат.

Теорема. *Для всех четных* p_1 *и* p_2 *справедливо соотношение*

$$E(\widetilde{W}_M^{\vec{p}}; \Delta_{\vec{l}})_C = \left(1 + \frac{K_{p_1}}{(2\pi)^{p_1}}\right)\frac{|\Delta_{l_2}|^{p_2}}{2^{p_2}p_2!} + \left(1 + \frac{K_{p_2}}{(2\pi)^{p_2}}\right)\frac{|\Delta_{l_1}|^{p_1}}{2^{p_1}p_1!} - \frac{|\Delta_{l_1}|^{p_1}|\Delta_{l_2}|^{p_2}}{2^{p_1+p_2}p_1!\,p_2!}, \tag{9}$$

где $K_{pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(p_i+1)}}{(2m+1)^{p_i+1}}$, $i = 1, 2$, — *константа Фавара.*

Доказательство теоремы базируется на некоторых вспомогательных утверждениях.

Лемма 2. *Пусть* $0 < h < b_{m-2}$ *и* $m = 2r + 2$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. *Для любых* $u, x \in (0, h)$ *имеет место неравенство*

$$\frac{1}{m!}|\widehat{B}_m(x-u)| > |Q_m(u, x)|.$$

Доказательство. Утверждение леммы при $m = 2$, 4 проверяется непосредственным подсчетом. Рассмотрим случай $p \geqslant 6$. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_m(u, x) = \frac{1}{m!} |\widehat{B}_m(x-u)|, \ \psi_m(u, x) = |Q_m(u, x)|.$$

Зафиксируем одну из переменных, например $x = x_*$, и рассмотрим функцию

$$\theta_m(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{m!\, x_*} |\widehat{B}_m|, & u \in [0, x_*], \\ \dfrac{h-u}{m!\,(h-x_*)} |\widehat{B}_m|, & u \in [x_*, h], \end{cases}$$

где $\widehat{B}_m = B_m - \widetilde{B}_m\left(\frac{1}{4}\right)$ (B_m — m-е число Бернулли).

Функция $\varphi_m(u, x_*)$ при $p \geqslant 6$ выпукла вверх на $[0, h]$, $h < b_{m-2}$. Из выпуклости $\varphi_m(u, x_*)$ и из неравенств $\varphi_m(0, x_*) > \theta_m(0)$, $\varphi_m(h, x_*) > \theta_m(h)$, $\varphi_m(x_*, x_*) \geqslant \theta_m(x_*)$ следует, что

$$\varphi_m(u, x_*) \geqslant \theta_m(u), \qquad u \in [0, h]. \tag{10}$$

Легко видеть, что на каждом из промежутков $[0, x_*]$, $[x_*, h]$ $\psi_m(u, x_*)$ — алгебраический многочлен степени $m-1$. Применяя неравенство Маркова [5, с. 56] получаем, что

$$|\psi'_m(u, x_*)| \leqslant \frac{2(m-1)^2}{x_*} \max_{u \in [0, x_*]} |\psi_m(u, x_*)|, \quad u \in [0, x_*],$$

и

$$|\psi'_m(u, x_*)| \leqslant \frac{2(m-1)^2}{h - x_*} \max_{u \in [x_*, h]} |\psi_m(u, x_*)|, \quad u \in [x_*, h].$$

Но согласно лемме 1

$$\max\{\|\psi(\cdot, x_*)\|_{C_{[0,x_*]}}; \ \|\psi(\cdot, x_*)\|_{C_{[x_*,h]}}\} \leqslant \frac{h^{m-1}}{(m-1)\,[(m-2)!!]^2\, 2^m},$$

а потому, учитывая, что $h < b_{m-2} < \frac{1}{4}$, при $m \geqslant 6$ имеем

$$|\psi'_m(u, x_*)| \leqslant \frac{2(m-1)\, h^{m-1}}{x_* 2^m\, [(m-2)!!]^2} < \frac{|\widehat{B}_m|}{m!\, x_*} = |\theta'_m(u)|, \quad u \in [0, x_*], \tag{11}$$

$$|\psi'_m(u, x_*)| \leqslant \frac{2(m-1)\, h^{m-1}}{(h-x_*)\, 2^m\, [(m-2)!!]^2} < \frac{|\widehat{B}_m|}{m!\,(h-x_*)} = |\theta'_m(u)|, \quad u \in [x_*, h]. \tag{12}$$

Из (11), (12) и того, что $\theta_m(0) = \psi_m(0, x_*) = \theta_m(h) = \psi_m(h, x_*) = 0$, следует неравенство

$$\theta_m(u) > \psi_m(u, x_*), \quad u \in (0, h). \tag{13}$$

Из (10) и (13) следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $x, u \in [0, h_1]$, $y, v \in [0, h_2]$ $(h_i < b_{p_i-2},\ i = 1, 2)$. *Тогда*

$$|\varphi(u, x, v, y)| = \frac{1}{p_1!} |\widehat{B}_{p_1}(x-u)\, Q_{p_2}(v, y)| + \frac{1}{p_2!} |\widehat{B}_{p_2}(y-v)\, Q_{p_1}(u, x)| - \\ - |Q_{p_1}(u, x)\, Q_{p_2}(v, y)|.$$

В самом деле,

$$\operatorname{sign} \widehat{B}_{p_1}(x-u) = (-1)^{r_1}, \ u, x \in [0, h_1], \ \operatorname{sign} \widehat{B}_{p_2}(y-v) = (-1)^{r_2}, \\ v, y \in [0, h_2]. \tag{14}$$

Из лемм 1, 2 и из (14) следует, что

$$\operatorname{sign}\left\{-Q_{p_1}(u,x)\left(\frac{1}{p_2!}\widehat{B}_{p_2}(y-v)+Q_p\,(v,y)\right)\right\}=$$

$$=\operatorname{sign}\left\{-\frac{1}{p_1!}\widehat{B}_{p_1}(x-u)\,Q_{p_2}(v,y)\right\}=(-1)^{r_1+r_2}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{1}{p_2!}\widehat{B}_{p_2}(y-v)+Q_{p_2}(v,y)\right|=\frac{1}{p_2!}\left|\widehat{B}_{p_2}(y-v)\right|-\left|Q_{p_2}(v,y)\right|. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем требуемое утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $x\in[0,h_1]$, $y\in[0,h_2]$ $(h_i<b_{p_i-2},\ i=1,2)$. *Тогда*

$$\int_0^1\int_0^1|\varphi(u,x,v,y)|\,dudv\leqslant\frac{K_{p_1}h_2^{p_2}}{(2\pi)^{p_1}\,p_2!\,2^{p_2}}+\frac{K_{p_2}h_1^{p_1}}{(2\pi)^{p_2}\,p_1!\,2^{p_1}}-\frac{h_1^{p_1}h_2^{p_2}}{2^{p_1+p_2}p_1!\,p_2!}\equiv L.$$

Действительно, на основании леммы 3

$$\int_0^1\int_0^1|\varphi(u,x,v,y)|\,dudv=\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}|\varphi(u,x,v,y|\,dvdu+$$

$$+\int_0^{h_2}\int_{h_1}^1\frac{1}{p_1!}\left|\widehat{B}_{p_1}(x-u)\,Q_{p_2}(v,y)\right|dudv+\int_{h_2}^1\int_0^{h_1}\frac{1}{p_2!}\left|\widehat{B}_{p_2}(y-v)\,Q_{p_1}(u,x)\right|dudv=$$

$$=\int_0^1\int_0^{h_2}\frac{1}{p_1!}\left|\widehat{B}_{p_1}(u)\,Q_{p_2}(v,y)\right|dvdu+\int_0^1\int_0^{h_1}\frac{1}{p_2!}\left|\widehat{B}_{p_2}(v)\,Q_{p_1}(u,x)\right|dudv-$$

$$-\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}\left|Q_{p_1}(u,x)\,Q_{p_2}(v,y)\right|dvdu. \tag{17}$$

В силу леммы 1 из (17) получаем

$$\int_0^1\int_0^1|\varphi(u,x,v,y)|\,dudv=\frac{K_{p_1}\,[(h_2-y)\,y]^{r_2+1}}{(2\pi)^{p_1}\,p_2!}+\frac{K_{p_2}\,[h_1-x)\,x]^{r_1+1}}{(2\pi)^{p_2}\,p_1!}-$$

$$-\frac{[(h_1-x)\,x]^{r_1+1}\,[(h_2-y)\,y]^{r_2+1}}{p_1!\,p_2!}\leqslant L,$$

и лемма 4 доказана.

Пусть $h_{11}=|\Delta_{l_1}|$, $h_{21}=|\Delta_{l_2}|$ (в силу периодичности функций класса $\widetilde{W}_M^{\vec{p}}$ это не нарушит общности) и $x\in[0,h_{11}]$, $y\in[0,h_{21}]$. Оценка сверху для величины $E(\widetilde{W}_M^{\vec{p}},\Delta_{\vec{l}})_C$, совпадающая с правой частью (9), следует из (8) и лемм 1 и 4. Остается доказать неулучшаемость этой оценки.

Введем обозначения $a_i=[0,h_{i1}]$, $b_i=\left[0,\frac{1}{4}+\frac{h_{i1}}{2}\right]$, $c_i=\left[\frac{3}{4}+\frac{h_{i1}}{2},1\right]$, $d_i=\left[\frac{1}{4}+\frac{h_{i1}}{2},\frac{3}{4}+\frac{h_{i1}}{2}\right]$, $e_i=\left[h_{i1},\frac{1}{4}+\frac{h_{i1}}{2}\right]$, $i=1,\,2$, и рассмотрим функции

$$\psi_0(u,v)=\begin{cases}(-1)^{r_1+r_2},\ (u,v)\in a_1\times(b_2\cup c_2)\cup(b_1\cup c_1)\times a_2=t_1,\\(-1)^{r_1+r_2+1},\ (u,v)\in a_1\times d_2\cup d_1\times a_2=t_2,\\(-1)^{r_1+r_2+1}2h_{21},\ (u,v)\in(e_1\cup c_1)\times d_2=t_3,\\(-1)^{r_1+r_2+1}2h_{11},\ (u,v)\in d_1\times(e_2\cup c_2)=t_4,\\(-1)^{r_1+r_2}(2h_{11}-4h_{11}h_{21}+2h_{21}),\ (u,v)\in d_1\times d_2=t_5,\\0,\ \ (u,v)\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{5}t_i,\end{cases}$$

$$\varphi_i(z)=\begin{cases}(-1)^{r_i+1}, & z\in[0,h_{i1}],\\ (-1)^{r_i}, & z\in[h_{i1},2h_{i1}],\\ 0, & z\overline{\in}[0,2h_{i1}], \quad i=1,2.\end{cases}$$

С помощью простых вычислений нетрудно убедиться, что функция

$$f_0(x,y)=\frac{1}{p_1!\,p_2!}\iint\limits_Q \psi_0(u,v)\,\widetilde{B}_{p_1}(x-u)\,\widetilde{B}_{p_2}(y-v)\,du dv-$$

$$-\frac{1}{p_2!}\int\limits_0^1\varphi_2(v)\,\widetilde{B}_{p_2}(y-v)\,dv-\frac{1}{p_1!}\int\limits_0^1\varphi_1(u)\,\widetilde{B}_{p_1}(x-u)\,du$$

принадлежит классу $\widetilde{W}_M^{\vec{p}}$ и обладает тем свойством, что

$$\left|e_{\vec{r},\vec{l}}\left(f_0;\frac{h_{11}}{2},\frac{h_{21}}{2}\right)\right|=N,$$

где N — правая часть (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Великин В. Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 1, с. 165—185.
2. Wronicz Z. Approximation and interpolation multiple splins.— Zeszyty Nauk. Univ. Jaqiellon. Prace Mat., 1975, **403**, N 17, p. 147—157.
3. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— М.; Наука, 1967.— 500 с.
4. Korneičuk N. P. On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect.— Analysis Math., 1975, 1, p. 91—101.
5. Зингер М. Я. Элементы дифференциальной теории чебышевских приближений.— М.: Наука, 1975.— 170 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
1.III 1978 г.