УДК 517.9

Л. А. Иванов

О принципе Гюйгенса в четномерном пространстве для некоторых уравнений с особенностями

В работе [1] рассматривался вопрос о существовании лакун у задачи Коши для уравнений, распадающихся на множители Эйлера—Пуассона—Дарбу. При этом отмечалось появление лакуны лишь при четной размерности основного пространства. Рассмотрим именно этот случай. Так как в нечетномерном пространстве исходным результатом является существование лакуны для уравнений, распадающихся на волновые множители [2], то в нашем случае ограничимся единичным значением параметра в операторе Бесселя.

В данной статье используется основной результат работы [1] о лакунах. Он позволяет описать некоторый класс уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Этот класс по существу не пересекается ни с одним, известным ранее (см. [3, 4]), однако по внутренней структуре он аналогичен примерам К. Штелльмахера [5]. Согласно результатам В. Боровикова [6] из всех задач рассматриваемого вида класс гюйгенсовых определяется однозначно.

В пространстве R_+^{n+1} переменных (t, x), $t \in R^1$, $t > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n) \in R^n$ рассматривается уравнение

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{a_k^2} \Delta \right) u = 0, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, a_k $(k = 1, \ldots, m)$ — вещественные константы и пока $a_1 > a_2 > \ldots > a_m > 0$. В случае, когда функции четные по t, $u \in C_{\text{чет}}$, для этого уравнения естественно (см. [1, 7]) ставить начальные условия вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^j u \bigg|_{t=0} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-2; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-1} u \bigg|_{t=0} = f(x),$$
$$u \in C_{\text{чет}}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) однозначно разрешима в классическом смысле и решение в явном виде выписывается через сферические средние от начальной функции [7]. Будем предполагать, что функция $f(x)$ достаточно гладкая.

Через $v_k(t, x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ обозначим решение задачи Коши для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{a_k^2} \Delta \right) v = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$v|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Используя лемму 2 работы [1] для четных n, решение задачи (3), (4) представляем в виде

$$v_k(t, x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[t^{n-2} Q\left(\frac{t}{a_k}, x \right) \right], \tag{5}$$

где $\frac{\partial}{\partial t^2} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t}$ и $Q\left(\frac{t}{a_k}, x\right)$ — среднее по сфере радиуса t/a_k с центром в точке x от f. В частности, при $n = 2m$ имеем

$$v_k(t, x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial t^2} \right)^{m-1} \left[t^{2m-2} Q\left(\frac{t}{a_k}, x \right) \right]. \tag{6}$$

Как отмечалось в [1], отсюда непосредственно вытекает принцип Гюйгенса для задачи (3), (4), т. е. задачи (1), (2) при $m = 1$. В работе [7] доказано, что для решения задачи (1), (2) справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-1} u(t, x) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k(t, x), \tag{7}$$

где

$$\beta_k = \frac{(-1)^{m-1} \prod_{k=1}^{m} a_k^2}{a_k^2 P'(a_k^2)}, \qquad P(\nu) = \prod_{k=1}^{m} (\nu - a_k^2).$$

Будем использовать известные тождества

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k a_k^{2s} = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^{m} a_i^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k^{2s-2}}{P'(a_k^2)} = 0, \quad s = 0, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Введем обозначения $d = t\frac{\partial}{\partial t}$, $\sigma = t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$, $B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ и оператор Бесселя, участвующий в (1), (3), (7), запишем в виде $B = \sigma d$. Справедлива такая лемма.

Лемма. *Для степеней рассматриваемого оператора Бесселя справедливо представление*

$$B^k = (\sigma d)^k = \sigma^k \sum_{j=1}^{k} (d - 2j\sigma)\, d. \tag{9}$$

Доказательство проводится индукцией по k.

В наших обозначениях с помощью (6) и (9) тождество (7) можно переписать в виде

$$\sigma^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} (d - 2j\sigma)\, du(t, x) = \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sigma^{m-1} t^{2m-2} Q\left(\frac{t}{a_k}, x\right).$$

Отсюда, обращая оператор σ, получаем

$$\prod_{j=1}^{m-1} (d - 2j\sigma)\, du(t, x) = \frac{1}{m!} t^{2m-2} \sum_{k=1}^{m} \beta_k Q\left(\frac{t}{a_k}, x\right), \tag{10}$$

где внеинтегральные члены исчезают в силу выполнения начальных условий (2). Левую часть тождества (10) можно переписать в виде

$$\left(\sum_{\substack{\iota \leqslant 2m-3 \\ l \leqslant m-1}} c_{\iota, l} t^{\iota} \frac{\partial^l}{\partial t^l}\right) \frac{\partial}{\partial t} u(t, x), \tag{11}$$

где $c_{\iota l}$ — некоторые константы. Точные значения этих постоянных для нас не важны, важны ограничения на индексы суммирования. Если некоторая гладкая функция $\psi(t)$ обращается достаточное число раз в нуль при $t = 0$, то равенства

$$t^{\iota} \frac{\partial^{l+1}}{\partial t^{l+1}} \varphi(t) = \psi(t), \qquad \frac{1}{l!} \int_0^t (t - \tau)^l \tau^{-\iota} \psi(\tau)\, d\tau$$

эквивалентны. Разбивая в соответствии с (11) правую часть в тождестве (10), приходим к представлению

$$u(t, x) = \sum_{i, l} \bar{c}_{i, l} \int_0^t (t - \tau)^l \tau^{2m+i+2} \sum_{k=1}^{m} \beta_k Q\left(\frac{\tau}{a_k}, x\right) d\tau, \tag{12}$$

где $l \leqslant m-1$, $i \geqslant 3 - 2m$, $\bar{c}_{i,l}$ — некоторые константы. Внося интегрирование в (11) под знак суммирования по k и совершая замену $a_k s = \tau$, получаем

$$u(t, x) = \sum_{i, l} \bar{c}_{i, l} \sum_{k=1}^{m} \beta_k a_k^{2m+i-1} \int_0^{t/a_k} (t - a_k s)^l s^{2m+i-2} Q(s, x)\, ds.$$

Вклад значений начальной функции, принимаемых на внутренности шара радиуса t/a_1 $(a_1 > a_2 > \ldots > a_m > 0)$ с центром в точке x, равен

$$\sum_{i,l} \bar{c}_{i,l} \int_0^{t/a_1} \sum_{k=1}^{m} \beta_k a_k^{2m+i-1} (t - a_k s)^l s^{2m+i-2} Q(s, x)\, ds. \tag{13}$$

В силу ограничений на индексы суммирования, исчезновения интегралов с нечетными степенями a_k и в силу тождества (8) получаем, что подынтегральное выражение аннулируется. Это означает, что для задачи (1), (2) при $n = 2m$ внутренность сферы $S\left(\frac{t}{q_1}, x\right)$ — лакуна. Если n — четно и $n > 2m$, то в формуле (5) дифференцирование более высокого порядка. Подобные рассуждения показывают, что справедлива такая теорема.

Теорема 1. *В четномерном пространстве для задачи* (1), (2) *внутренность наименьшей сферы в основании характеристического конуса — лакуна тогда и только тогда, когда* $m \leqslant \frac{n}{2}$.

Достаточность доказана выше. Необходимость для простоты установим при $m = 2$; в общем случае доказательство аналогично. Из представления (13) (см. также [1]) получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{4} \int_0^t \tau^{-1} d\tau \int_0^\tau s^3 \left[\frac{a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\, Q\left(\frac{s}{a_1}, x\right) + \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_2^2}\, Q\left(\frac{s}{a_2}, x\right)\right] ds,$$

откуда видно, что лакуна отсутствует, так как запас дифференцирований в (5) оказался недостаточным.

Замечание. Как показывают результаты работы [6], шаровые кольца Ω_k между сферами $S\left(\frac{t}{a_k}, x\right)$ и $S\left(\frac{t}{a_{k+1}}, x\right)$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ лакунами не являются. Впрочем это можно увидеть непосредственно из полученного представления для решения $u(t, x)$ задачи (1), (2).

Рассмотрим случай, когда сомножители в (1) могут быть кратными. В частности, пусть $a_1 = a_2 = \ldots = a_p > a_{p+1} > \ldots > a_m > 0$. Тогда замена $a_k' = a_p + (k-1)\beta$, где β — малый отрицательный параметр, приводит к случаю, рассмотренному выше.

Теорема 2. *Решение задачи* (1), (2) *удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда* $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$, $m \leqslant \frac{n}{2}$.

Доказательство. Представление решения получается с помощью предельного перехода по параметру β, при $\beta \to 0$. Как отмечено в [2], порядок лакуны может при этом только уменьшиться. С другой стороны, вклад начальных значений в шаровых кольцах Ω_k $(k = 1, \ldots, m-1)$ не зависит от β. Замечание к теореме 1 заканчивает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Л. А. О лакунах для операторов, распадающихся на множители Эйлера-Пуассона-Дарбу.— ДАН СССР, 1977, **233**, № 4, с. 535—538.
2. Гальперн С. А., Кондрашов В. Е. Задача Коши для дифференциальных операторов, распадающихся на волновые множители.— ТММО, 1967, **16**, с. 109—136.
3. Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В. О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \Sigma a_{ij}(x - t)\, u_{y_i y_j} = 0$.— Мат. сб. 1977, **102**, № 3, с. 391—409.
4. Шимминг Р. Гюйгенсовы гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка для многокомпонентных полей.— Укр мат. журн., 1977, **29**, № 3, с. 351—363.
5. Stellmacher K. L. Eine Klasse huyghenscher Differential gleichungen und ihre Integration.— Math. Ann., 1955, **130**, № 3, S. 219—233.
6. Боровиков В. А. Некоторые достаточные условия отсутствия лакун.— Мат. сб., 1961, **55**, № 3, с. 237—254.
7. Иванов Л. А. О задаче Коши для операторов, распадающихся на множители Эйлера-Пуассона-Дарбу.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 4, с. 736—739.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
18.IV 1978 г.