УДК 517

Л. И. Ронкин

О теоремах Лиувилля для функций, голоморфных на нулевом множестве полинома

Пусть $f(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, — целая функция, χ_f — ее нулевое множество (т. е. $\chi_f = \{z : f(z) = 0\}$) и χ_f^* — множество обыкновенных* точек множества χ_f. Напомним, что функция $\Phi : \chi_f \to \mathbf{C}$ называется голоморфной на χ_f, если для любой точки $z^0 \in \chi_f$ существуют окрестность этой точки v_{z^0} и голоморфная в ней функция $f_{z^0}(z)$ такие, что $f_{z^0}(z) = \Phi(z)$, $\forall z \in \chi_f \cap v_{z^0}$. Наряду с такими функциями Φ здесь будут рассматриваться также функции Φ, голоморфные на χ_f^* как на комплексном многообразии, т. е. голоморфные от соответствующих локальных координат.

* О нулевых, или более обще, об аналитических множествах и их обыкновенных и исключительных точках см., например, в [1, 2].

Теорема 1. *Пусть $P(z)$ — псевдополином, т. е.*

$$P(z) = f_0('z) z_1^m + f_1('z) z_1^{m-1} + \ldots + f_m('z),$$

где $f_0('z), \ldots, f_m('z)$ — целые функции от $'z = (z_2, \ldots, z_n)$. Пусть, далее, функция $\Phi: \chi_P \to \mathbf{C}$ непрерывна на χ_P и голоморфна на χ_P^*. Тогда, если $\sup_{z \in \chi_P} |\Phi(z)| < \infty$, то $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$ *на каждой связной компоненте множества χ_P.*

Доказательство. Представим псевдополином $P(z)$ в виде $P(z) = P_1^{k_1}(z) \ldots P_l^{k_l}(z)$, где $P_1, \ldots, P_l$ — неприводимые псевдополиномы того же вида, что и $P(z)$. Тогда $\chi_P = \bigcup_{j=1}^{l} \chi_{P_j}$. Ясно, что доказательство теоремы 1 сводится к доказательству ее утверждения для сужения функции Φ на произвольное χ_{P_j}. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $P(z)$ — неприводимый псевдополином. Дискриминант $D_P('z)$ этого псевдополинома голоморфен в $\mathbf{C}^{n-1}$ и ввиду его неприводимости не равен тождественно нулю. Возьмем какую-либо точку $'z^0$, принадлежащую множеству $\Omega_P = \{'z : f_0('z) \neq 0,\ D_P('z) \neq 0\}$. В достаточно малой окрестности $\omega_{'z^0}$ точки $'z^0$ уравнение $P(z_1, 'z) = 0$ имеет m различных голоморфных решений $z_1^{(1)}('z), \ldots, z_1^{(m)}('z)$. Голоморфными от $'z$ в $\omega_{'z^0}$ будут также функции $\varphi_j('z) = \Phi(z_1^{(j)}('z), 'z)$, $j = 1, \ldots, m$, и основные симметрические функции от них, которые обозначим через $S_j('z)$, $j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что значение функции S_j в точке $'z$, очевидно, не зависит от выбора окрестности $\omega_{'z^0}$, содержащей $'z$. Таким образом, функции $S_j('z)$ однозначно определены в области Ω_P и из их голоморфности в $\omega_{'z^0}$ ввиду произвольности выбора $'z^0$, вытекает, что они голоморфны во всем Ω_P. При этом поскольку на χ_P функция $\Phi(z)$ ограничена, то на Ω_P будут ограничены все функции S_j. Множество $\mathbf{C}^n \setminus \Omega_P = \{'z : f_0('z) D_P('z) = 0\}$ — множество устранимых особенностей, и, следовательно, функции $S_j('z)$ продолжаются на $\mathbf{C}^{n-1}$ как голоморфные ограниченные функции, откуда немедленно следует, что $S_j('z) \equiv \mathrm{const}$, $j = 1, 2, \ldots$. Таким образом, псевдополином $z_1^m - S_1 z_1^{m-1} + \ldots + (-1)^m S_m$, корнями которого при $'z \in \Omega_P$ являются значения функции $\Phi(z)$, имеет постоянные коэффициенты, откуда с учетом непрерывности функции $\Phi(z)$ и вытекающей из неприводимости P связности множества χ_P (см. [3, 4]) следует, что $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$. Теорема доказана.

Следствие (теорема Лиувилля для функций на нулевом множестве полинома). *Если $P(z)$ — неприводимый полином от переменных $z_1, \ldots, z_n$, и функция $\Phi: \chi_P \to \mathbf{C}$, ограничена на χ_P, непрерывна на χ_P и голоморфна на χ_P^*, то* $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$.

В теории целых функций наряду с теоремой Лиувилля об ограниченных функциях хорошо известно и ее обобщение (столь же элементарное), относящееся к функциям степенного роста. Аналогом этого обобщения в рассматриваемой ситуации является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, — полином степени m от переменных $z_1, \ldots, z_n$, и голоморфная на χ_P функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию $|\Phi(z)| \leqslant C_1 + C_2 |z|^\rho$, где C_1, C_2 и ρ — некоторые положительные константы. Тогда $\Phi(z)$ — сужение на χ_P некоторого полинома $\Psi(z)$ степени не выше $C_{m,\rho}$, где константа $C_{m,\rho} \leqslant \frac{m}{2}(m^2 + 2m - 3 + 2\rho)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что существует линейное отображение $A: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ такое, что $P(\alpha\zeta) = \zeta_1^m + \varphi_1('\zeta)\zeta_1^{m-1} + \ldots + \varphi_m('\zeta)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что

$$P(z) = z_1^m + f_1('z) z_1^{m-1} + \ldots + f_m('z), \tag{1}$$

где $f_k('z)$ — полиномы степени не выше $k\,(k=1,\ldots,m)$ от переменных $z_2,\ldots,z_n$. Далее, разложив $P(z)$ как полином от z_1 на неприводимые множители, а именно, представив его в виде $P=Q_1^{k_1}\ldots Q_l^{k_l}$, где $Q_1,\ldots,Q_l$, — неприводимые полиномы от z_1 вида (1), получим, что $\chi_P=\chi_Q$, где $Q=Q_1\ldots Q_l$. Из этого представления следует, что дискриминант $D_Q('z)$ полинома Q, также полином, не равен тождественно нулю. Обозначим через μ степень Q как полинома от z_1 и при $'z\in\Omega_Q=\{'z:D_Q('z)\neq 0\}$ через $z_1^{(1)}('z),\ldots,z_1^{(\mu)}('z)$ — корни уравнения $Q(z_1,'z)=0$. Заметим, что, как и при доказательстве теоремы 1, у каждой точки $'z^0\in\Omega_Q$ существует такая окрестность $\omega_{'z^0}$, что при надлежащей нумерации функции $z_1^{(1)}('z),\ldots,z_1^{(\mu)}('z)$ будут голоморфны в $\omega_{'z^0}$. Тогда в указанной окрестности голоморфным по $'z$ будет и интерполяционный многочлен

$$\Psi(z)=\sum_{i=1}^{\mu}\Phi(z_1^{(i)}('z),'z)\frac{\prod\limits_{j\neq i}(z_1-z_1^{(j)}('z))}{\prod\limits_{j\neq i}(z_1^{(i)}('z)-z_1^{(j)}('z))}. \tag{2}$$

Этот многочлен, очевидно, инвариантен относительно выбора нумерации корней $z_1^{(j)}('z)$, следовательно, он определен и голоморфный по $'z$ не только в $\omega_{'z^0}$, но, учитывая произвольность $'z^0\in\Omega_Q$, и во всей области Ω_Q. Согласно теореме о продолжении с аналитического множества (см., например, [5, с. 313]) функция $\Phi(z)$ продолжается до целой функции, для которой сохраним обозначение $\Phi(z)$. Для интерполирующего эту функцию многочлена $\Psi(z_1,'z)$ в $\mathbf{C}\times\Omega_Q$ справедливо (см. например, [6]) представление

$$\Psi(z_1,'z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{Q(\zeta,'z)-Q(z_1,'z)}{Q(\zeta,'z)(\zeta-z_1)}\Phi(\zeta,'z)\,d\zeta, \tag{3}$$

где $t=t('z)$ таково, что все корни $z_1^{(j)}('z)$ лежат внутри круга $z_1<t$. Так как множество χ_Q замкнуто, то при $'z$ из некоторой окрестности произвольно фиксированной точки $'z^0$ (не предполагается, что $'z^0\in\Omega_Q$) t можно выбирать не зависящим от $'z$. Но при постоянном t таком, что $Q(\zeta,'z)\neq 0$, когда $|\zeta|=t$, $'z\in\omega$, интеграл в (3), очевидно, определяет функцию, голоморфную по $'z$ в ω и по z_1 в круге $|z_1|<t$. Отсюда и ввиду того, что $t('z)$ можно выбирать сколь угодную большим, следует, что правая часть в (3) голоморфна во всем $\mathbf{C}^n$ и, следовательно, равенством (3) функция $\Psi(z)$ продолжается до целой функции, также обозначенной через Ψ. Покажем, что целая функция $\Psi(z)$ — искомая.

Действительно, по построению $\Psi(z)=\Phi(z)$ $\forall z\in\mathbf{C}\times\Omega_Q$. Отсюда, поскольку обе рассматриваемые функции непрерывны на χ_Q, следует, что $\Psi(z)=\Phi(z)$ $\forall z\in\chi_Q$.

Для доказательства того, что функция $\Psi(z)$ есть полином, оценим ее рост. Обозначим $M_f(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, а через $\Lambda(r;u)$ — среднее значение функции $u(z)$ по шару $|z|\leqslant r$.

Заметим, что для любой целой функции $f(z)$ имеет место неравенство (см., например, [2, с. 82])

$$\ln^+M_f(r)\leqslant\frac{(1+k)^{2n}}{k^{2n}}\Lambda((1+k)r;\ln^+|f|), \tag{4}$$

где k — любое положительное число. Поэтому для оценки роста функции $\Psi(z)$ достаточно оценить рост ее среднего $\Lambda(r;\ln^+|\Psi|)$. Из (2) следует

$$\Lambda(r;\ln^+|\Psi|)\leqslant\ln\mu+\max\Lambda(r;\ln^+|\Phi(z_1^{(i)}('z),'z)|)+$$

$$+\max_i\Lambda\left(r;\ln^+\prod_{j\neq i}(|z_1|+|z_1^{(j)}('z)|)\right)+\max_i\Lambda\left(r;\ln^+\left|\prod_{j\neq i}(z_1^{(i)}('z)-z_1^{(j)}('z))\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant \ln\mu + \max_l \Lambda(r; \ln^+|\Phi(z_1^{(l)}('z), 'z)|) + \max_l \Lambda\Big(r; \ln^+\prod_{j\neq l}(|z_1| + |z_1^{(j)}('z)|)\Big) +$$

$$+ \max_l \Lambda\Big(r; \ln^+\prod_{\substack{i,j\\ i<j, i\neq l, j\neq l}}(|z_1^{(i)}('z)| + |z_1^{(j)}('z)|)\Big) + \frac{1}{2}\Lambda\Big(r; \ln^+\frac{1}{|D_Q('z)|}\Big) =$$

$$= \ln\mu + I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Корни $z_1^{(j)}('z)$ полинома $Q(z) = z_1^\mu + Q_1('z)\, z_1^{\mu-1} + \ldots + Q_\mu('z)$ оцениваются следующим образом:

$$|z_1^{(j)}('z)| \leqslant \sum_{l=1}^{\mu} |Q_l('z)| \leqslant C_1|'z|^\mu + C_2, \tag{5}$$

где C_1 и C_2 — константы. Отсюда и из данной в условии теоремы 2 оценки функции $\Phi(z)$ следует, что $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{I_1}{\ln r} \leqslant \rho\mu$.

Кроме того, с помощью неравенства (5) непосредственно оцениваются I_2 и I_3, а именно:

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{I_2}{\ln r} \leqslant \mu(\mu-1), \quad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{I_3}{\ln r} \leqslant \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2}.$$

Далее заметим, что дискриминант $D_Q('z)$ — определитель порядка $2\mu - 1$, элементами которого служат коэффициенты разложения полинома Q по степеням z_1. Следовательно, $D_Q('z)$ — это полином от $'z$ степени, не выше $(2\mu-1)\mu$ и, значит,

$$\ln^+|D_Q('z)| \leqslant (2\mu-1)\mu\ln^+|'z| + \mathrm{const}.$$

Воспользуемся теперь неравенством $\Lambda\Big(r; \ln^+\frac{1}{|D_Q|}\Big) \leqslant \Lambda(r; \ln^+|D_Q|) + \mathrm{const}$, справедливость которого вытекает из формулы Иенсена. Учитывая указанную выше оценку для $\ln^+|D_Q('z)|$, получаем, что $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\frac{I_4}{\ln r} \leqslant \frac{(2\mu-1)\mu}{2}$. Из приведенных оценок с помощью неравенства (4) заключаем, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+ M_\Psi(r)}{\ln r} \leqslant \frac{(1+k)^{2n}}{2k^{2n}}(\mu^3 + \mu^2 - \mu + 2\mu\rho).$$

Следовательно, функция $\Psi(z)$—полином степени, не выше $2^{-1}(1+k)^{2n}k^{-2n}\mu \times (\mu^2 + \mu - 1 + 2\rho)$, и тем более выше, чем $\frac{1}{2}(k+1)^{2n}k^{-2n}m(m^2 + m - 1 + 2\rho)$. Ввиду произвольности $k > 0$ отсюда следует, что степень полинома $\Psi(z)$ не превосходит $\frac{m}{2}(m^2 + m - 1 + 2\rho)$. Теорема доказана.

Примечание при корректуре. Когда эта статья была в наборе, автору стало известно о работе Бьорка (см. Ann. Inst. Fourier, 1974, v. 24, № 4, p. 157—165), в которой рассматривалось продолжение с произвольного алгебраического многообразия V и для степени $C_{\rho, V}$ продолжающего полинома получена оценка $C_{\rho, V} \leqslant \rho + C_V$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрве М. Функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1965.— 164 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 430 с.
3. Зуев Л. Ф. О делителях целых псевдополиномов. Смоленский мат. сб., 1970, № 3, с. 20—32.

4. Р о н к и н Л. И. О глобальной приводимости псевдополиномов.— В кн.: Мат. физика и функц. анализ. Вып. 2. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1971, с. 117—121.
5. Г а н н и н г Р., Р о с с и Х. Аналитические функции многих переменных.— М.: Мир, 1969.— 395 с.
6. Г о н ч а р о в В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1954.— 328 с.

ФТИНТ АН УССР

Поступила в редакцию
18.V 1977 г.