УДК 517.544

В. И. Слизкий

Об одной краевой задаче для двух функций на римановой поверхности

Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода h, а L — простая замкнутая без самопересечения кривая Ляпунова, ограничивающая на R область $Д$ рода s, $0 \leqslant s \leqslant h$. Дополнение $Д + L$ до полной поверхности R

обозначим через $Д_*$. Пусть $A(t, z)$ — ядро Беенке и Штейна (см. [1, §1]). Здесь и в дальнейшем используются обозначения и терминология работы [1]. Точки P_0 и P_n (где $n = \overline{1, h}$), в которых ядро $A(t, z)$ имеет особенности, будем предполагать находящимися соответственно $P_0 \in Д$ и $P_n \in Д_*$. Функция сдвига $\alpha(t)$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм кривой L на себя, удовлетворяющий на L условиям: 1) $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ (условие Карлемана); 2) $0 \neq \alpha'(t) \in H(L)$.

Условимся, что все функции и ковариансы, заданные на L, а также предельные значения функций удовлетворяют на L условию Гельдера (H-непрерывны), обозначим их $H(L)$.

Задача. Найти две функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, аналитические в $Д$ и H-непрерывные в $Д + L$ по краевому условию

$$\Phi_1^+(t) = A(t)\Phi_2^+(t) + B(t)\Phi_2^+[\alpha(t)] + C(t)\overline{\Phi_2^+(t)} + D(t)\overline{\Phi_2^+[\alpha(t)]} + g(t) \quad (1)$$

(неоднородная задача при $g(t) \neq 0$) или

$$\Phi_1^+(t) = A(t)\Phi_2^+(t) + B(t)\Phi_2^+[\alpha(t)] + C(t)\overline{\Phi_2^+(t)} + D(t)\overline{\Phi_2^+[\alpha(t)]} \quad (2)$$

(однородная задача при $g(t) = 0$), где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ и $g(t)$ — H-непрерывные функции (удовлетворяющие на L некоторым условиям, которые будут указаны ниже).

Ставится вопрос об условиях нетеровости, нормальной разрешимости и вычислении индекса краевой задачи (1).

Лемма 1. *Краевая задача*

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = \overline{\Phi_1^+(t)} \quad (3)$$

не имеет другого решения, кроме произвольной постоянной, а именно:

$$\Phi_1^+(z) \equiv C, \qquad \Phi_2^+(z) \equiv \overline{C}, \quad (4)$$

где C — произвольная постоянная, причем $C \equiv 0$, если функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ обращаются в нуль в точке P_0.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что пара функций вида (4) — решение задачи (3). Используя формулы Сохоцкого, предельные значения аналитических функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ и краевое условие (3), получаем интегральное уравнение

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \Phi_1^+[\alpha(\tau)]\left(A[\alpha(\tau), \alpha(t)]\, d[\alpha(\tau)] - \overline{A(\tau, t)\, d\tau}\right) = 0,$$

являющееся уравнением Фредгольма, а следовательно, число линейно независимых решений этого уравнения конечно. Значит, и число линейно независимых решений задачи (3) также конечно. Допустим, что задача (3) имеет решения, отличные от постоянной. Тогда и уравнение Фредгольма обязано иметь бесконечное множество линейно независимых решений. Указанное противоречие и доказывает лемму 1.

Аналогично можно доказать утверждение для области $Д_*$.

Лемма 2. *Краевая задача*

$$\Phi_1^-[\alpha(t)] = \lambda\overline{\Phi_2^-(t)}, \quad \lambda = \pm 1,$$

не имеет другого решения, кроме

$$\Phi_1^-(z) \equiv C, \quad \Phi_2^-(z) \equiv \lambda\overline{C} \quad (z \in Д_*),$$

где C — произвольная постоянная, причем $C \equiv 0$, если функции $\Phi_1^-(z)$ и $\Phi_2^-(z)$ обращаются в нуль хотя бы в одной точке P_n $(n = 1, 2, \ldots, h)$.

Лемма 3. *Интегральное уравнение*

$$K\varphi(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\tau)\left(A[\alpha(\tau), \alpha(t)]\, d[\alpha(\tau)] - \overline{A(\tau, t)\, d\tau}\right) = 0 \qquad (5)$$

не имеет нетривиальных решений.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (5). Построим интегралы типа Коши (для $z \in Д$)

$$F_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi[\alpha(t)]\, A(t, z)\, dt, \qquad F_2^+(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\, A(t, z)\, dt. \qquad (6)$$

Так как $K\varphi(t) \equiv F_1^+[\alpha(t)] - \overline{F_2^+(t)} = 0$, то на основании леммы 1 получаем, что $F_1^+(z) = C$, $F_2^+(z) = \bar{C}$. Следовательно, $\varphi[\alpha(t)] - C = \Psi_1^-(t)$ и $\overline{\varphi(t) + C} = \Psi_2^-(t)$ — предельные значения функций $\Psi_1^-(z)$ и $\Psi_2^-(z)$, аналитических в $Д_*$ и исчезающих в точках P_n $(n = \overline{1, h})$. Применяя к краевой задаче $\Psi_1^-[\alpha(t)] + C = \overline{\Psi_2^-(t) - C}$ лемму 2, приходим к системе равенств

$$\Psi_1^-(z) + C \equiv C_*, \qquad \Psi_2^-(z) - \bar{C} \equiv \bar{C}_*. \qquad (7)$$

В точках P_n, где $n = \overline{1, h}$, имеем $\Psi_1^-(z) \equiv \Psi_2^-(z) \equiv 0$. Поэтому из равенств (7) получаем $C = C_*$ и $C = -C_*$ или $C \equiv C_* \equiv 0$. Следовательно, $\Psi_1^-(z) \equiv \equiv \Psi_2^-(z) \equiv 0$, а значит, и $\varphi(t) \equiv 0$. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Две функции* $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, *аналитические в* $Д$ *и* H*-непрерывные в* $Д + L$, *допускают интеральное представление*

$$\Phi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi[\alpha(t)]\, A(t, z)\, dt + C, \qquad \Phi_2^+(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)} A(t, z)\, dt + \bar{C} \qquad (8)$$

с условиями для плотностей $\varphi[\alpha(t)]$ и $\overline{\varphi(t)}$:

$$\int_L \varphi[\alpha(t)]\, dZ_k(t) = 0, \qquad \int_L \overline{\varphi(t)}\, dZ_k(t) = 0, \qquad (9)$$

где $dZ_k(t)$ — *базис ковариант первого рода,* $k = 1, 2, \ldots, s$; $s \leqslant h$; *постоянная* C *по заданным функциям* $\Phi_1^+(z)$ *и* $\Phi_2^+(z)$ *определяется однозначно, причем условия* (9) *отсутствуют при* $s = 0$.

Доказательство. Интегральное уравнение

$$K\varphi(t) = \Phi_1^+[\alpha(t)] - \overline{\Phi_2^+(t)} \qquad (10)$$

имеет согласно лемме 3 единственное решение $\varphi(t)$. Введем интегралы типа Коши (6) с условиями (9) для функции $\varphi(t)$ (см. [1, с. 73, соотношения (1.9)]). Применяя к интегралам (6) формулы Сохоцкого и условие Карлемана, правую часть уравнения (10) можно записать в виде краевой задачи

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] - F_1^+[\alpha(t)] = \overline{\Phi_2^+(t) - F_2^+(t)}.$$

Эта задача согласно лемме 1 имеет единственное решение:

$$\Phi_1^+(z) - F_1^+(z) = C, \qquad \Phi_2^+(z) - F_2^+(z) = \bar{C}.$$

Отсюда получаем, что для $z \in Д$

$$\Phi_1^+(z) = F_1^+(z) + C, \qquad \Phi_2^+(z) = F_2^+(z) + \bar{C}.$$

Плотность $\varphi(t)$ однозначно определяется по заданным функциям $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$. Функции $F_1^+(z)$ и $F_2^+(z)$ однозначно определяются плотностью $\varphi(t)$.

Поэтому постоянная C тоже однозначно определяется заданием функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$. Теорема доказана.

Используя интегральное представление (8), формулы Сохоцкого и условие Карлемана, перейдем от краевой задачи (2) к интегральному уравнению

$$\tilde{K}\varphi(t) \equiv A(t)\overline{\varphi(t)} + B(t)\overline{\varphi[\alpha(t)]} + C(t)\varphi(t) + [1 + D(t)]\varphi[\alpha(t)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi[\alpha(\tau)] A(\tau, t)\,d\tau + \frac{A(t)}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}\,A(\tau, t)\,d\tau + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \overline{\varphi(\tau)}A[\tau,\alpha(t)]d\tau -$$

$$- \frac{C(t)}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\,\overline{A(\tau, t)\,d\tau} - \frac{D(t)}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)\,\overline{A[\tau, \alpha(t)]\,d\tau} +$$

$$+ 2C[1 - C(t) - D(t)] - 2\bar{C}[A(t) + B(t)] = 0. \qquad (11)$$

Для нетеровости (см. [2, 3]) интегрального уравнения (11) необходимо и достаточно, чтобы на L выполнялось условие

$$\Delta(t) \equiv C(t)\,C[\alpha(t)] - D(t)\,D[\alpha(t)] \neq 0, \qquad (12)$$

индекс этого уравнения вычисляется по формуле $\varkappa = \operatorname{ind}[\Delta(t)]$.

Интегральное уравнение (11) вместе с условиями (9) равносильно однородной краевой задаче (2). Пусть l и r — соответственно числа линейно независимых решений однородной краевой задачи (2) и интегрального уравнения (11). Тогда $l = r - 2s + 1$.

Интегральное уравнение, союзное с (11), имеет вид (если умножить еще это уравнение на dt)

$$(1 + D[\alpha(t)])\,\psi[\alpha(t)]\,d[\alpha(t)] + C(t)\,\psi(t)\,dt + \overline{B[\alpha(t)]\,\psi[\alpha(t)]\,d[\alpha(t)]} +$$

$$+ \overline{A(t)\,\psi(t)\,dt} + \frac{d[\alpha(t)]}{\pi i}\int_L \psi(\tau)\,A[\alpha(t), \tau]\,d\tau -$$

$$- \frac{\overline{dt}}{\pi i}\int_L \overline{(A(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau + B[\alpha(\tau)]\,\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)])}\,\overline{A(t, \tau)} -$$

$$- \frac{\overline{dt}}{\pi i}\int_L (C(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau + D[\alpha(\tau)]\,\psi[\alpha(\tau)]\,d[\alpha(\tau)])\,\overline{A(t, \tau)} +$$

$$+ 2dt\int_L \tilde{C}(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \qquad (13)$$

$$\tilde{C}(t) \equiv C[1 - C(t) - D(t)] - \bar{C}[A(t) + B(t)].$$

Можно показать, что все решения уравнения (13) удовлетворяют условию $\int_L \tilde{C}(t)\,\psi(t)\,dt = 0$, а также справедливы соотношения

$$\psi(t)\,dt = d\Psi_1^+(t),$$

$$A(t)\,\psi(t)\,dt + B[\alpha(t)]\,\psi[\alpha(t)]\,d[\alpha(t)] + \overline{C(t)\,\psi(t)\,dt} +$$

$$+ \overline{D[\alpha(t)]\,\psi[\alpha(t)]\,d[\alpha(t)]} = d\Psi_2^+(t). \qquad (14)$$

Исключая из соотношений (14) $\psi(t)\,dt$, получаем краевую задачу для дифференциалов $d\Psi_1^+(z)$ и $d\Psi_2^+(z)$:

$$A(t)\,d\Psi_1^+(t) + B[\alpha(t)]\,d\Psi_1^+[\alpha(t)] + \overline{C(t)\,d\Psi_1^+(t)} +$$

$$+ \overline{D[\alpha(t)]\,d\Psi_1^+[\alpha(t)]} = d\Psi_2^+(t). \qquad (15)$$

Краевую задачу (15) назовем союзной к краевой задаче (2). Пусть l' и r' — соответственно число линейно независимых решений союзной задачи (15) и союзного интегрального уравнения (13). Тогда $l' = r' + 2s_*$, так как дифференциалы $d\Psi_1^+(z)$ и $d\Psi_2^+(z)$ определяются с точностью до слагаемого:

$$\sum_{v=1}^{s_*} \beta_v d\Omega_v^+(z) + \sum_{v=1}^{s_*} \gamma_v dW_v^+(z), \tag{16}$$

где β_v и γ_v — произвольные постоянные:

$$d\Omega_v^+(z) \equiv -\frac{dz}{2\pi i}\int_L \mathrm{Re}[Z_v^-(t)]' A(z,t)dt, \quad dW_v^+(z) \equiv -\frac{dz}{2\pi i}\int_L \mathrm{Im}[Z_v^-(t)]' A(z,t)dt,$$

$v = 1, 2, \ldots, s_*$; $h \equiv s + s_*$, s_* — род $Д_*$. Разность $l - l'$ выражает индекс I краевой задачи (1). Вычисляя эту разность, получаем $l - l' = r - r' - 2s - 2s_* + 1 = \varkappa - 2h + 1$ или $\mathrm{I} = l - l' = \varkappa - 2h + 1$, где $\varkappa = \mathrm{ind}[\Delta(t)]$, h — род R.

Заметим, что в [4] величина индекса I вычислена другим способом для краевой задачи $\Phi_1^+[\alpha(t)] = Q(t)\overline{\Phi_2^+(t)}$.

Для разрешимости (см. [2, 3]) интегрального уравнения $\widetilde{K}\varphi(t) = 2g(t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\mathrm{Re}\int_L g(t)\psi_j(t)\,dt = 0$, где $\{\psi_j(t)\}$ — фундаментальная система решений союзного интегрального уравнения (13), $j = 1, 2, \ldots, r'$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $z \equiv t$ $d\Omega_v^+(t) \equiv 0$ и $dW_v^+(t) \equiv 0$ $(v = \overline{1, s_*})$. Следовательно, слагаемое (16) обращается в нуль при $z \equiv t$.

Из изложенного выше следует справедливость таких утверждений.

Теорема 2. *Для нетеровости краевой задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы на L выполнялось условие*

$$\Delta(t) \equiv C(t)C[\alpha(t)] - D(t)D[\alpha(t)] \neq 0.$$

Теорема 3. *Индекс* I *краевой задачи* (1) *вычисляется по формуле*

$$\mathrm{I} = l - l' = \varkappa - 2h + 1,$$

где $\varkappa = \mathrm{ind}[\Delta(t)]$, h — *род* R.

Теорема 4. *Для разрешимости краевой задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\mathrm{Re}\int_L g(t)\,d\Psi_{1j}^+(t) = 0,$$

где $\{d\Psi_{1j}^+(t)\}$ — *первая компонента общего решения союзной краевой задачи* (15), $j = 1, 2, \ldots, l'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. — Успехи мат. наук, 1968, **23**, вып. 3, с, 67—121.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
3. Литвинчук Г. С. Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно-сопряженными неизвестными.—Изв. АН СССР. Сер. мат., 1967, **31**, № 3, с. 563—586.
4. Зверович Э. И. Двухэлементные краевые задачи и методы локально-конформного склеивания. — Сиб. мат. журн., 1973, **14**, № 1, с. 64—85.

Киевский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила в редакцию 28.XII 1977 г.,
после переработки — 26.VI 1978 г.