УДК 517.43

Л. А. Сахнович

Системы уравнений с разностными ядрами

Введем пространство $L_m^p(0,\omega)$, состоящее из вектор-функций $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)]$, норма которых определяется равенством

$$\|f\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} \int_0^{\omega} |f_k(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2. \tag{1}$$

Рассмотрим ограниченный оператор S, действующий в $L_m^p(0,\omega)$ и определенный формулой

$$Sf = \frac{d}{dx} \int_0^{\omega} f(t)\, s(x-t)\, dt, \tag{2}$$

где элементы $s_{k,l}(x)$ $(1 \leqslant k, l \leqslant m)$ матрицы $s(x)$ принадлежат $L^q(-\omega,\omega)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$. (Интеграл в правой части (0.2) предполагается абсолютно непрерывным на сегменте $[0,\omega]$ при $f(t) \in L_m^p$). К системам уравнений вида

$$Sf = \varphi, \quad \varphi \in L_m^p(0,\omega) \tag{3}$$

приводят задачи теории упругости [1], дифракции [2] и переноса [3].

В данной статье предлагается метод решения системы (3), опирающийся на разностную структуру ядра оператора S.

Случай $m > 1$ отличается рядом специфических черт от простейшего случая $m = 1$, который изучался ранее [4, 5].

1. Системы уравнений со специальной правой частью.

1. Наряду с оператором S рассмотрим оператор S_τ, определенный формулой

$$S_\tau f = \frac{d}{dx} \int_0^{\omega} f(t)\, s^\tau(x-t)\, dt, \tag{4}$$

где $s^\tau(x)$ — матрица, транспонированная к $s(x)$. Заметим, что $S_\tau = S$ при $m = 1$. Оператор S^* действует в сопряженном к $L_m^p(0,\omega)$ пространстве $L_m^q(0,\omega)$.

Введем оператор инволюции

$$Uf = \overline{f(\omega - x)}. \tag{5}$$

Как и в случае $m = 1$ [4], верно соотношение

$$S^* = US_\tau U. \tag{6}$$

Так как оператор S_τ ограничен в $L_m^p(0,\omega)$, равенство (6) позволяет расширить оператор S^* до $L_m^p(0,\omega)$. Существенную роль в теории операторов с разностным ядром играют матрицы-функции $N_k(x), M_k(x)$ $(k=1, 2)$, удовлетворяющие соотношениям

$$SN_1=M(x),\quad SN_2=E_m,\quad S^*M_1=E_m,\quad S^*M_2=N^*(x),\tag{7}$$

где строки матриц $N_k(x)$, $M_k(x)$ принадлежат $L_m^p(0,\omega)$, а

$$M(x)=s(x),\quad N(x)=-s(-x),\quad 0\leqslant x\leqslant\omega.\tag{8}$$

Введем еще матрицы m-го порядка

$$a(\lambda)=i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}M_1^*(t)\,dt,\qquad b(\lambda)=E_m+i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}M_2^*(t)\,dt,\tag{9}$$

$$c(\lambda)=E_m+i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}N_1(t)\,dt,\qquad d(\lambda)=i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}N_2(t)\,dt.\tag{10}$$

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — матрицы, имеющие m строк. Положим $(A,B)=\int_0^\omega A(x)B^*(x)\,dx$. Определим матрицу γ порядка $2m$ при помощи равенства

$$\gamma=\{(SN_k, M_l)-(N_k, S^*M_l)\}_{k,l=1}^2.\tag{11}$$

Обозначим через $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2m}$ корни уравнения

$$\det(E_{2m}+i\lambda\gamma)=0.\tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть оператор S, определенный формулой (2), ограничен в пространстве $L_m^p(0,\omega)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$ и существуют матрицы-функции $N_k(x)$, $M_k(x)$ $(k=1, 2)$ с элементами из $L^p(0,\omega)$, удовлетворяющие соотношениям (7). Тогда имеет место равенство*

$$SB_\gamma(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_m,\quad \lambda\neq\lambda_l\quad(1\leqslant l\leqslant 2m),\tag{13}$$

где

$$B_\gamma(x,\lambda)=u_\gamma(x,\lambda)-i\lambda\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}u_\gamma(t,\lambda)\,dt,\tag{14}$$

$$u_\gamma(x,\lambda)=a_\gamma(\lambda)N_1(x)+b_\gamma(\lambda)N_2(x),\tag{15}$$

$$[a_\gamma(\lambda), b_\gamma(\lambda)]=[a(\lambda), b(\lambda)](E_{2m}+i\lambda\gamma)^{-1}.\tag{16}$$

Доказательство. Как и в [4], доказывается равенство

$$(A_0S-SA_0^*)f=i\int_0^\omega f(t)[M(x)+N(t)]\,dt,\tag{17}$$

где операторы

$$A_0f=i\int_0^x f(t)\,dt,\qquad A_0^*f=-i\int_x^\omega f(t)\,dt\tag{18}$$

действуют в $L_m^p(0,\omega)$, $M(x)$ и $N(x)$ определены формулами (8). Введем матрицы-функции $\mathscr{L}_n(x)$ при помощи соотношений

$$S\mathscr{L}_n=x^{n-1}E_m,\quad n=1,2,\ldots\tag{19}$$

Полагая $f=\mathscr{L}_n$, из формулы (17) выводим рекуррентное соотношение

$$\frac{1}{n}\mathscr{L}_{n+1}=\int_0^\omega\mathscr{L}_n(t)\,dtN_1(x)+\int_0^\omega\mathscr{L}_n(t)N(t)\,dtN_2(x)-\int_x^\omega\mathscr{L}_n(t)\,dt.\tag{20}$$

По условию теоремы матрица $\mathscr{L}_1$ существует и совпадает с N_2. Тогда в силу (20) существуют и матрицы $\mathscr{L}_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем норму матрицы $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^m$ следующим образом:

$$\| A(x) \| = \left(\sum_{i,j=1}^{m} \int_0^{\omega} | a_{ij}(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из соотношения (20) следует $\| \mathscr{L}_{n+1} \| \leqslant Cn \| \mathscr{L}_n \|$, т. е. $\| \mathscr{L}_{n+1} \| \leqslant C^n n!$, откуда вытекает сходимость ряда

$$B_\gamma(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} \mathscr{L}_{n+1}, \quad |\lambda| < C^{-1}. \tag{21}$$

Справедливость соотношения (13) вытекает непосредственно из (19) и (21). Пользуясь формулами (20), (21), выводим

$$B_\gamma(x, \lambda) = u_\gamma(x, \lambda) - i\lambda \int_x^{\omega} B_\gamma(t, \lambda)\, dt, \tag{22}$$

где $u_\gamma(x, \lambda)$ определяется формулой (15), а коэффициенты $a_\gamma(\lambda)$, $b_\gamma(\lambda)$ имеют вид

$$a_\gamma(\lambda) = i\lambda \int_0^{\omega} B_\gamma(x, \lambda)\, dx, \qquad b_\gamma(\lambda) = E_m + i\lambda \int_0^{\omega} B_\gamma(x, \lambda) N(x)\, dx. \tag{23}$$

Решая интегральное уравнение (22), получаем, что при $|\lambda| < C^{-1}$ верны равенства (13)—(15). Чтобы доказать (16), перепишем (19) и (23) следующим образом:

$$a(\lambda) = i\lambda (SB_\gamma, M_1), \qquad b(\lambda) = E_m + i\lambda (SB_\gamma, M_2), \tag{24}$$

$$a_\gamma(\lambda) = i\lambda (B_\gamma, S^* M_1), \qquad b_\gamma(\lambda) = E_m + i\lambda (B_\gamma, S^* M_2). \tag{25}$$

Так как $(Sf, g) = (f, S^* g)$, $f \in L_m^q(0, \omega)$, $g \in L_m^p(0, \omega)$, то из (14), (15), (24), (25) следует равенство

$$[a(\lambda), b(\lambda)] = [a_\gamma(\lambda), b_\gamma(\lambda)](E_{2m} + i\lambda\gamma), \tag{26}$$

где γ определяется равенством (11). Равенство (26) эквивалентно доказываемому соотношению (16). В силу аналитичности $B_\gamma(x, \lambda)$ и $e^{i\lambda x}$ по λ формулы (13)—(16), доказанные при условии $|\lambda| < C^{-1}$, остаются верными при всех $\lambda \neq \lambda_l$ $(1 \leqslant l \leqslant 2m)$. Теорема доказана.

2. При $m = 1$ матрица γ имеет вид [5] $\gamma = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$. Если

$$R = \int_0^{\omega} \mathscr{L}_1(t)\, dt \neq 0, \tag{27}$$

то в [5] выведено равенство

$$\Gamma = \frac{1}{R} \int_0^{\omega} [t\mathscr{L}_1(\omega - t) - \mathscr{L}_2(t)]\, dt. \tag{28}$$

П р и м е р. В теории тонкого крыла самолета важную роль играет сингулярное уравнение [6]

$$Sf = {\int_0^{\omega}}' f(t) \frac{1}{t - x}\, dt = \varphi(x). \tag{29}$$

Функции $\mathscr{L}_1(x)$ и $\mathscr{L}_2(x)$ могут быть выбраны следующим образом:

$$\mathscr{L}_1(x)=\sqrt{\frac{x}{\omega-x}}, \qquad \mathscr{L}_2(x)=\sqrt{\frac{x}{\omega-x}}\left(x-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{\beta}{\sqrt{x(\omega-x)}},$$

где β — произвольное число. Тогда в силу (27), (28) имеем

$$R=\frac{\pi}{2}\omega, \qquad \Gamma=-\frac{2\beta}{\omega}. \tag{30}$$

Таким образом, в примере (29) при $\beta\neq 0$ выполняется неравенство $\gamma\neq 0$

3. Отдельно рассмотрим случай, когда

$$\gamma=0, \quad m\geqslant 1. \tag{31}$$

Полагая $B(x,\lambda)=B_0(x,\lambda)$, из теоремы 1 получаем

$$B(x,\lambda)=i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}Q(x,t)\,dt+N_2(x)-(i\lambda)^2\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int_0^\omega e^{i\lambda u}Q(t,u)\,du\,dt-$$

$$-i\lambda\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}N_2(t)\,dt, \tag{32}$$

где матрица-функция $Q(x,t)$ имеет вид

$$Q(x,t)=M_1^*(t)\,N_1(x)+M_2^*(t)\,N_2(x). \tag{33}$$

Введем матрицы-функции

$$B_+(x,\lambda)=i\lambda\int_0^\omega e^{i\lambda t}Q(x,t)\,dt+N_2(x)-(i\lambda)^2\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int_{t-x}^\omega e^{i\lambda u}Q(t,u)\,du\,dt- \tag{34}$$

$$-i\lambda\int_x^\omega N_2(u)\,du,$$

$$B_-(x,\lambda)=-(i\lambda)^2\left[\int_x^\omega\int_0^{t-x}e^{i\lambda(x-t+u)}Q(t,u)\,du\,dt-\int_x^\omega e^{i\lambda(x-t)}\int_t^\omega N_2(u)\,du\,dt\right]. \tag{35}$$

Сравнивая (32) и (34), (35), получаем

$$B(x,\lambda)=B_+(x,\lambda)+B_-(x,\lambda), \tag{36}$$

причем

$$\|B_+(x,\lambda)\|\frac{1}{|\lambda|^2}=o(1), \quad \lambda\to\infty, \quad \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0, \tag{37}$$

$$\|B_-(x,\lambda)\|\frac{1}{|\lambda|^2}=o(1), \quad \lambda\to\infty, \quad \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0. \tag{38}$$

Так как согласно (13) и (36) справедливо равенство $SB_-(x,\lambda)=$ $=e^{i\lambda x}E_m-SB_+(x,\lambda)$, то в силу (37), (38) выполняется

$$\frac{1}{|\lambda|^2}\|SB_-(x,\lambda)\|=o(1), \quad \lambda\to\infty. \tag{39}$$

Из аналитичности $\frac{1}{\lambda^2}SB_-(x,\lambda)$ по λ и (39) вытекает $SB_-(x,\lambda)=0$. Значит, верно равенство

$$SB_+(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_m. \tag{40}$$

Замечание. Если существует такое M, что при всех f из $L_m^p(0,\omega)$ выполняется неравенство $\|Sf\|_q\leqslant M\|f\|_p$, то $\gamma=0$.

Действительно, в этом случае оператор S^* действует из $L_m^p(0, \omega)$ в $L_m^q(0, \omega)$ и

$$(Sf, g) = (f, S^*g), \quad f, g \in L_m^p(0, \omega). \tag{41}$$

Из (11) и (41) непосредственно следует выполнение условия (31).

2. Построение обратного оператора. 1. Через $W_{q,m}^{(l)}$ обозначим совокупность l раз дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x)$ таких, что $\varphi^{(l)}(x) \in L_m^q(0, \omega)$. На $W_{q,m}^{(2)}$ определим оператор

$$T\varphi = \int_0^\omega \varphi'(t)\, Q(x, t)\, dt + \varphi(0)\, N_2(x) - \varphi'(0) \int_x^\omega N_2(u)\, du -$$

$$- \int_x^\omega \int_{t-x}^\omega \varphi''(x - t + u)\, Q(t, u)\, du dt. \tag{42}$$

Легко видеть, что $T\varphi \in L_m^p(0, \omega)$. Из формул (30) и (42) следует

$$B_+(x, \lambda) = Te^{i\lambda x} E_m. \tag{43}$$

Согласно (40) и (43) верно соотношение

$$ST(e^{i\lambda x} E_m) = e^{i\lambda x} E_m, \tag{44}$$

из которого непосредственно вытекает теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\gamma = 0$. *Тогда оператор* T, *определенный формулой* (42) *на* $W_{q,m}^{(2)}$,— *правый обратный для оператора* S, *т. е.*

$$ST\varphi = \varphi, \quad \varphi \in W_{q,m}^{(2)}. \tag{45}$$

2. В прикладных задачах [2], приводящих к системам с разностным ядром, существенную роль играет матрица-функция

$$\rho(\lambda, \mu) = \int_0^\omega B(x, \lambda)\, e^{i\mu x} dx. \tag{46}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\gamma = 0$. *Если уравнения*

$$Sf = 0, \quad S_\tau g = 0 \tag{47}$$

имеют в $L_m^p(0, \omega)$ *только тривиальные решения* $f = 0$, $g = 0$, *то верны равенства*

$$a(\lambda)\, c(-\lambda) + b(\lambda)\, d(-\lambda) = 0, \tag{48}$$

$$\rho(\lambda, \mu) = -i\, \frac{a(\lambda)\, c(\mu) + b(\lambda)\, d(\mu)}{\lambda + \mu}, \tag{49}$$

$$T\varphi = -\frac{d}{dx} \int_0^\omega \varphi'(t)\, \Phi(x, t)\, dt + \varphi(0)\, N_2(x), \tag{50}$$

где

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x+t}^{2\omega - |x-t|} Q\left(\frac{s + x - t}{2}, \frac{s - x + t}{2}\right) ds, \quad \varphi \in W_{q,m}^{(2)}. \tag{51}$$

Доказательство. Перепишем равенство (35) следующим образом:

$$B_-(x, \lambda) = -(i\lambda)^2 \int_0^{\omega-x} e^{-i\lambda v} \int_{v+x}^{\omega} [Q(t, t-x-v) - N_2(t)]\, dt dv. \tag{52}$$

Так как $SB_- = 0$, то по условию теоремы имеем $B_-(x, \lambda) = 0$. Тогда из (33) и (52) вытекает

$$\int_x^{\omega} [M_1^*(t-x) N_1(t) + M_2^*(t-x) N_2(t) - N_2(t)]\, dt = 0. \tag{53}$$

Проводя для оператора S^* такие же рассуждения, выведем аналог соотношения (53):

$$\int_x^{\omega} [N_2^*(t-x) M_2(t) + N_1^*(t-x) M_1(t) - M_1(t)]\, dt = 0. \tag{54}$$

Используя формулы (9), (10), убеждаемся, что пара соотношений (53), (54) эквивалентна равенству

$$a(\lambda) c(-\lambda) + b(\lambda) d(-\lambda) = a(\lambda) + d(-\lambda) +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^{\omega} e^{-i\lambda v} \int_v^{\omega} N_2(u)\, du dv + \lambda^2 \int_0^{\omega} e^{i\lambda v} \int_v^{\omega} M_1^*(u)\, du dv.$$

Снова учитывая (9) и (10), из последнего соотношения получаем

$$a(\lambda) c(-\lambda) + b(\lambda) d(-\lambda) = i\lambda \int_0^{\omega} [M_1^*(u) - N_2(u)]\, du. \tag{55}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\omega} [M_1^*(u) - N_2(u)]\, du = (SN_2, M_1) - (N_2, S^* M_1). \tag{56}$$

Так как по условию теоремы $\gamma = 0$, то из (11), (55) и (56) вытекает доказываемое равенство (48).

Чтобы вычислить $\rho(\lambda, \mu)$, воспользуемся формулой (14):

$$\rho(\lambda, \mu) = -i \frac{a(\lambda)[c(\mu) - c(-\lambda)] + b(\lambda)[d(\mu) - d(-\lambda)]}{\lambda + \mu}, \tag{57}$$

откуда согласно (48) следует (49).

Равенство (42) может быть приведено к виду

$$T\varphi = -\frac{d}{dx} \int_0^{\omega} \varphi'(t) \Phi(x, t)\, dt + \varphi(0) N_2(x) + \varphi'(0) \int_x^{\omega} [Q(t, t-x) - N_2(t)]\, dt. \tag{58}$$

Из (53) и (58) непосредственно вытекает (50). Теорема доказана.

3. При $p = 2$ выясним структуру класса операторов, обратных к оператору с разностным ядром S.

Теорема 4. *Пусть оператор T ограничен вместе с обратным в $L_m^2(0, \omega)$. Для того чтобы оператор $S = T^{-1}$ имел вид (2), необходимо и достаточно выполнение следующих условий.* 1). *Существуют матрицы*

$N_k(x)$ и $M_k(x)$ $(k=1,\ 2)$ порядка m с элементами из $L^2(0,\ \omega)$ такие, что оператор T допускает представление

$$T\varphi = \frac{d}{dx}\int_0^\omega \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(x,t)\,dt, \quad \varphi\in L_m^2(0,\omega), \tag{59}$$

где $\Phi(x,\ t)$ определяется формулами (29) и (51), а элементы матрицы $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t)$ при каждом x принадлежат $L^2(0,\ \omega)$. 2) Справедливо равенство (48), в котором матрицы $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $d(\lambda)$ определены формулами (9), (10).

Необходимость. При $p=2$ выполняется условие $\gamma=0$. Для ограниченного в $L_m^2(0,\ \omega)$ оператора T из представления (50) и формулы (53) выводим (59).

Достаточность. Из формул (33), (49) и (59) вытекает равенство

$$(TA_0 - A_0^* T)\,f = i\int_0^\omega f(t)\,Q(x,t)\,dt. \tag{60}$$

Тогда оператор $S=T^{-1}$ удовлетворяет соотношению

$$(A_0S - SA_0^*)\,f = i\,(f,\ S^*M_1)\,SN_1 + i\,(f,\ S^*M_2)\,SN_2. \tag{61}$$

Убедимся, что верны равенства

$$S^*M_1 = E_m, \quad SN_2 = E_m. \tag{62}$$

Сравнивая коэффициенты при λ в обеих частях (48), получаем

$$\int_0^\omega [M_1^*(u) - N_2(u)]\,du = 0. \tag{63}$$

Следовательно, выполняется равенство (55), эквивалентное паре соотношений (53), (54). Из (59), пользуясь соотношениями (53), (54), находим $TE_m = N_2$, $T^*E_m = M_1$, откуда следуют равенства (62). Полагая

$$M(x) = SN_1, \quad N^*(x) = S^*M_2 \tag{64}$$

и учитывая (62), перепишем формулу (61) следующим образом:

$$(A_0S - SA_0^*)\,f = i\int_0^\omega f(t)\,[M(x) + N(t)]\,dt. \tag{65}$$

Из (65), как и при $m=1$ [4], выводим, что оператор S имеет вид (2) и выполняются соотношения (8). Теорема доказана.

4. Некоторые задачи контактной теории упругости [1], теории дифракции на решетке [2] приводят к уравнению

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{d}{dx}\int_{a_l}^{b_l} f(t)\,h(x-t)\,dt = \varphi(x), \quad a_r < x < b_r, \tag{66}$$

где $1\leqslant r\leqslant m$, $a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots<a_m<b_m$, $h(u)\in L^q(a_1-b_m, b_m-a_1)$.

При дополнительном условии

$$b_1-a_1 = b_2-a_2 = \ldots = b_m-a_m = \omega \tag{67}$$

уравнение (66) переходит в систему вида (3):

$$\frac{d}{du}\int_0^1 \overrightarrow{f(v)}\, s(u-v)\, dv = \overrightarrow{\varphi(u)}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

где

$$s(u) = \{h(\omega u + a_r - a_l)\}_{l,r=1}^{m}, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1, \quad \overrightarrow{f(v)} = [f(a_1 + v\omega), f(a_2 + v\omega), \ldots$$

$$\ldots, f(a_m + v\omega)], \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad \overrightarrow{\varphi(v)} = [\varphi(a_1 + v\omega), \varphi(a_2 + v\omega), \ldots$$

$$\ldots, \varphi(a_m + v\omega)], \quad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Мы ввели знак вектора над $f(u)$ и $\varphi(u)$, чтобы отличить их от функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, определенных на системе интервалов (a_l, b_l) $(1 \leqslant l \leqslant m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости.— М.— Л.: Гостехиздат, 1949.— 270 с.
2. Хенл Х., Мауэ Л., Вестпфаль К. Теория дифракции.— М.: Мир, 1964.— 427 с.
3. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов.— М.: Госатомиздат, 1961.
4. Сахнович Л. А. Об интегральном уравнении с ядром, зависящим от разности аргументов.— Мат. исследования. Кишинев, 1973, 8, № 2, с. 138—146.
5. Сахнович Л. А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке.— Асимптотические методы в теории систем. Иркутск, 1977, вып. 10, с. 217—222.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 599 с.

Одесский
электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
13.VI 1978 г.