УДК 519.41/47

П. П. Барышовец

Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами

Исследованию групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп посвящены работы многих авторов. Нередко в качестве таких систем выступают различные системы абелевых подгрупп. Известно, однако, что если в произвольной группе дополняемы все абелевы подгруппы, то в ней дополняемы вообще все подгруппы, т. е. она вполне факторизуема [1—3]. Аналогичный результат получается, если в конечной группе налагать условие дополняемости на одни только циклические подгруппы [3]. Поэтому изучались также группы, обладающие системой дополняемых абелевых подгрупп, которая не включает в себя всех циклических подгрупп [4] группы, все нециклические подгруппы которых дополняемы ([5] и др.).

Естественно также исследовать неабелевы группы, в которых дополняемы все неабелевы подгруппы. Вопрос о строении таких групп поставлен в работе [6]. В настоящей заметке этот вопрос решается для случая локально конечных неабелевых групп.

1. Описание неабелевых нильпотентных групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами дает следующая теорема.

Теорема 1. *В неабелевой нильпотентной группе G тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда $G = A \times B$ и B — вполне факторизуемая абелева группа, а A — неабелева примарная (по числу p) группа одного из следующих типов:*

1) $A = A_1\langle b\rangle$, *где A_1 — нормальная элементарная абелева подгруппа и $b^p \in Z(A)$;*

2) A *— конечная группа Миллера—Морено;*

3) A *— прямое произведение с объединенным центром двух групп диэдра порядка 8;*

4) A *— прямое произведение с объединенным центром двух неабелевых групп порядка p^3 и экспоненты p, $p > 2$;*

5) $A = ((\langle a_0\rangle \times \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle) \leftthreetimes \langle b_1\rangle) \leftthreetimes \langle b_2\rangle$, *где* $a_i^p = b_j^p = 1$, $[b_1, b_2] = a_0$, $[a_3, b_j] = a_j$, $[a_i, b_j] = 1$, *если* $i < 3$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2$);

6) $A = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *где* $a^4 = b^2 = c^2 = 1$, $[b, c] = a^2$, $[a, c] = 1$;

7) $A = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle$, *где* $a^4 = b^4 = c^2 = 1$, $[a, c] = a^2$, $[b, c] = b^2$;

8) $A = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle d\rangle$, *где* $a^4 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$, $[a, d] = a^2$, $[b, d] = c$, $[c, d] = 1$;

9) $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a^8 = b^2 = 1$, $[a, b] = a^{-2}$;

10) $A = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a_1^9 = a_2^3 = b^3 = 1$, $[a_1, b] = a_2$, $[a_2, b] = a_1^6$;

11) $A = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes (\langle d\rangle \times \langle f\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = b^p = c^p = d^p = f^p = 1$, $[b, d] = a_1$, $[c, d] = a_2$, $[b, f] = 1$, $[c, f] = a_1$, $[a_i, d] = [a_i, f] = 1$, $i = 1, 2$, $p > 2$;

12) $A = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes (\langle d\rangle \times \langle f\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = b^p = c^p = d^p = f^p = 1$, $[b, d] = a_1$, $[c, d] = a_2$, $[b, f] = a_2$, $[c, f] = a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2}$, $\beta_i \not\equiv 0 \pmod p$, $[a_i, d] = [a_i, f] = 1$, $i = 1, 2$;

13) $A = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes (\langle b_1\rangle \times \langle b\rangle)$, *где* $a_1^p = a_2^p = a^p = b_1^p = b^p = 1$, $[a, b] = a_2$, $[a_2, b] = a_1$, $[a, b_1] = a_1$, $[a_1, b_1] = [a_2, b_1] = [a_1, b] = 1$, $p > 2$;

14) $A = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \leftthreetimes (\langle b_1\rangle \times \langle b\rangle)$, *где* $a_1^9 = a_2^3 = b_1^3 = b^3 = 1$, $[a_1, b] = a_2$, $[a_2, b] = a_1^6$, $[a_1, b_1] = a_1^3$, $[a_2, b_1] = 1$;

15) $A = ((\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle a_3\rangle) \leftthreetimes \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $a_1^p = a_2^q = a_3^p = a^p = b^p = 1$, $[a_i, a] = [a_i, b] = 1$, $i = 1, 2$, $[a_3, a] = a_1$, $[a_3, b] = a_2$, $[a, b] = a_3$, $p > 2$.

2. Строение конечной ненильпотентной группы G с дополняемыми неабелевыми подгруппами существенным образом зависит от того, содержит или нет группа G неабелевы силовские подгруппы. Эти случаи рассматриваются отдельно в теоремах 2 и 3 соответственно. Отметим, что при доказательстве теоремы 3 используются результаты о строении непримарно факторизуемых групп (т. е. непримарных групп, в которых все непримарные подгруппы дополняемы), или, короче, нпф-групп (см. [7 и 8]).

Теорема 2. *В конечной ненильпотентной гуппе G, содержащей, по крайней мере, одну неабелеву силовскую подгруппу, тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда $G = A \times B$, где B — вполне факторизуемая абелева группа, а A — группа одного из следующих типов:*

1) $A = K \leftthreetimes \langle b\rangle$, $K = \langle a_1, a_2\rangle$, $a_1^4 = a_2^4 = 1$, $a_1^2 = a_2^2 = [a_1, a_2]$, $b^3 = 1$, $b^{-1}a_1b = a_2$, $b^{-1}a_2b = a_1a_2$;

2) $A = P \leftthreetimes \langle b\rangle$, $\langle b\rangle$ *— вполне факторизуемая группа*, $P = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \leftthreetimes \langle a_3\rangle$, $a_1^p = a_2^p = a_3^p = 1$, $[a_2, a_3] = a_1$, $[a_1, a_3] = [a_1, b] = 1$, $b^{-1}a_2b = a_2^{\alpha}$, $b^{-1}a_3b = a_3^{\beta}$, $1 < \alpha$, $\beta < p$, $\alpha\beta \equiv 1 \pmod p$, $p > 2$;

3) $A = P \leftthreetimes \langle b\rangle$, $\langle b\rangle$ *— вполне факторизуемая группа*, P *— неабелева группа порядка* p^3 *и экспоненты* p *с* $p > 2$ *и если* $b_1 \in \langle b\rangle$, $|b_1|$ *— простое число, то* $P\langle b_1\rangle$ *— группа Шмидта*;

4) $A = D\langle c\rangle$, D *— абелева нормальная вполне факторизуемая группа*, $|c| = q^{\alpha}$, $c^q \in Z(A)$ *и элемент* c *действует на силовской* q*-подгруппе группы* D *нетождественно*;

5) $A = K \leftthreetimes P$, K *— вполне факторизуемая абелева силовская* p'*-подгруппа*, P *— неабелева группа порядка* p^3 *и экспоненты* p *или группа диэдра порядка 8, причем* K *разлагается в прямое произведение подгрупп простых порядков, нормальных в* A, *а централизатор подгруппы* K *в группе* P *отличен от* P;

6) A *— симметрическая группа степени 4.*

Теорема 3. *В конечной ненильпотентной группе G с абелевыми силовскими подгруппами тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда $G = A \times B$, где B — абелева вполне факторизуемая группа, A — группа одного из следующих типов:*

1) A *— неабелева вполне факторизуемая группа*;

2) $A = A' \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $|b| = q^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $b^q \in Z(A)$, q *— простое число, причем* A' *— вполне факторизуемая абелева* q'*-группа*;

3) $A = A' \leftthreetimes \langle b\rangle$, *где* $\langle b\rangle$ *— вполне факторизуемая группа, а* A' *разлагается в прямое произведение* $A' = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$ *нормальных делителей группы* A, *на множителях которого* $\langle b\rangle$ *и ее собственные подгруппы действуют неприводимо, причем среди подгрупп* K_i *по крайней мере одна имеет непростой порядок, а произведение подгрупп* K_i, *имеющих одинаковые порядки, является силовской подгруппой группы* A;

4) $A = (K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s) \leftthreetimes (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle)$, *где* $b^q = a^t = 1$, $a^{-1}ba = b^r$, $r^t \equiv 1 \pmod q$, K_i *— минимальные нормальные делители группы* A, $|K_i|$ *есть либо простое число, и тогда* $[K_i, b] = 1$, $K_i\langle a\rangle$ *— неабелева группа, либо* t*-я степень простого числа, отличного от* q *и* t. *Среди подгрупп* K_i *по крайней мере одна имеет непростой порядок; если* $|K_i| = p^t$, *то подгруппа* $\langle b, a\rangle$ *действует на* K_i *следующим образом:*

$$b=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_t \end{pmatrix}, \quad a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$|\alpha_1|=q, \alpha_1^r=\alpha_2, \dots, \alpha_t^r=\alpha_1$, *причем* p^2-1 *делится на* q.

3. В этом пункте укажем некоторые утверждения, касающиеся бесконечных неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Доказываются они при помощи теорем 1—3.

Теорема 4. *Бинарно конечные неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами локально конечны.*

Локально разрешимые неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами локально конечны.

Теорема 5. *В бесконечной локально конечной ненильпотентной группе G тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда $G=A\times B$, где B — вполне факторизуемая абелева группа, а A — группа одного из типов:*

1) *A — конечная неабелева группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами;*

2) *A — неабелева вполне факторизуемая группа;*

3) *$A=D\langle c\rangle$, D — абелева нормальная вполне факторизуемая группа, $|c|=q^\alpha$, $c^q\in Z(A)$, q — простое число;*

4) *$A=K\leftthreetimes L$, K разлагается в прямое произведение нормальных в A подгрупп простых порядков, а L либо неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, либо группа диэдра порядка 8, причем $C_L(K)\neq L$;*

5) *$A=K\leftthreetimes L$, K разлагается в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей K_α группы A, а L либо неабелева группа порядка pq, p и q — простые числа, либо циклическая вполне факторизуемая; при этом произведение $K_\alpha L$ является соответственно группой типа 4) или 3) теоремы 3.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников С. Н. Группы с системами дополняемых подгрупп.— Мат. сб., 1954, **35**, № 1, с. 93—128.
2. Каргаполов М. И. Некоторые вопросы теории нильпотентных и разрешимых групп.— ДАН СССР, 1959, **127**, № 6, с. 1164—1166.
3. Горчаков Ю. М. Примитивно факторизуемые группы.— Уч. записки Пермского ун-та, 1960, **17**, с. 15—31.
4. Зайцев Д. И., Зуб О. Н. Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами непростых порядков.— В кн.: Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 105—125.
5. Зуб О. Н. Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы.— В кн.: Группы с ограничениями для подгрупп. Киев: Наук. думка, 1971, с. 134—159.
6. Черников С. Н. Исследование групп с заданными свойствами подгрупп.— Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 2, с. 193—209.
7. Алексеева Э. С. Конечные непримарно факторизуемые группы.— В кн.: Группы с системами дополняемых подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 147—179.
8. Сучков Н. М. О некоторых линейных группах с дополняемыми подгруппами.— Алгебра и логика, 1977, **16**, № 5, с. 603—620.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 27.I 1978 г.,
после переработки — 23.XI 1978 г.