УДК 517.5

П. В. Задерей

О скорости сходимости частных сумм Фурье на классах непрерывных непериодических функций двух переменных

Пусть $AH^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P)$ — класс непрерывных непериодических функций $f(x, y)$, заданных в квадрате $P=\{(x, y): |x| \leqslant \pi, \ |y| \leqslant \pi\}$ и удовлетворяющих условиям

$$|f(x, y)-f(x', y')| \leqslant A[\omega_1(|x-x'|)+\omega_2(|y-y'|)] \quad \forall (x, y), \quad (x', y') \in P,$$

$$f(x, \pi)-f(x, -\pi)=u(x), \quad f(\pi, y)-f(-\pi, y)=v(y).$$

Если $u(x)\equiv v(y)\equiv 0$, то $AH^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P) \overset{\mathrm{df}}{=} AH_{\omega_1,\omega_2}$. Классы $1H^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P)$ и $1H_{\omega_1,\omega_2}$ обозначим через $H^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P)$ и H_{ω_1,ω_2}.

Здесь $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — произвольные фиксированные модули непрерывности, а $u(t)$ и $v(z)$ — непрерывные фиксированные функции такие, что $u(\pi)-u(-\pi)=v(\pi)-v(-\pi)$; A — const.

Обозначим через $S_{nm}(f; x, y)$, $S_n(u; x)$ и $S_m(v; y)$ частные суммы ряда Фурье соответственно функций $f(x, y)$, $u(x)$ и $v(y)$, т. е.

$$S_{nm}(f; x, y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t, z)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(z-y)}{\sin\frac{z-y}{2}}\,dtdz,$$

$$S_n(u; x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt,$$

$$S_m(v; y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(z)\,\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(z-y)}{\sin\frac{z-y}{2}}\,dz.$$

В данной заметке приводятся результаты об асимптотике отклонения сумм Фурье $S_{nm}(f; x, y)$ на классах $H^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P)$.

В одномерном случае эта задача решена в работе [1]. Для функций двух переменных она рассматривалась в [2]. В работе [3] в ряде важных частных случаев получено решение задачи Колмогорова — Никольского. Однако даже в простейшем случае, например при $\omega_1(t)=t^\alpha$, $\omega_2(z)=z^\alpha$, $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ и $n=m^2$, эта задача оставалась открытой (ибо в этом случае остаточный член в [2] оказывался не меньшим, чем «основной»).

Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Для любых $(x, y)\in P$ при произвольном возрастании натуральных чисел n и m имеет место соотношение*

$$\sup_{f\in H^{u,v}_{\omega_1,\omega_2}(P)} \|f(x, y)-S_{nm}(f; x, y)-R^{u,v}_{nm}(x, y)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi^4} \ln n \ln m \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} \min\left\{\omega_1\left(\frac{4t}{2n+1}\right),\ \omega_2\left(\frac{4z}{2m+1}\right)\right\} \sin t \sin z \,dt\,dz +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \ln n \int\limits_0^{\pi/2} \omega_1\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t dt + \frac{2}{\pi^2} \ln m \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2\left(\frac{4z}{2m+1}\right) \sin z dz +$$

$$+ O\left[\min\left\{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right),\ \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right\} \ln nm + \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right], \qquad (*)$$

где

$$R_{nm}^{u,v}(x, y) = \frac{y}{2\pi}\left[u(x) - S_n(u;\ x) - \frac{s}{\pi} \operatorname{sign} x \operatorname{si}(n(\pi - |x|))\right] +$$

$$+ \frac{x}{2\pi}\left[v(y) - S_m(v;\ y) - \frac{s}{\pi} \operatorname{sign} y \operatorname{si}(m(\pi - |y|))\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{sign} x \operatorname{si}(n(\pi - |x|)) S_m(v; y) + \frac{1}{\pi} \operatorname{sign} y \operatorname{si}(m(\pi - |y|)) S_n(u; x) +$$

$$+ \frac{s}{\pi^2} \operatorname{sign}(xy) \operatorname{si}(n(\pi - |x|)) \operatorname{si}(m(\pi - |y|)),$$

$$s = u(\pi) - u(-\pi) = v(\pi) - v(-\pi).$$

Если $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ выпуклые модули непрерывности, то в $(*)$ имеет место знак равенства.

Доказательство. Рассмотрим непрерывную на P функцию $\varphi(x, y) = f(x, y) - h(x, y)$, где $h(x, y) = \dfrac{x \cdot v(y) + y \cdot u(x)}{2\pi} - \dfrac{sxy}{4\pi^2}$. Продолжим полученную функцию $\varphi(x, y)$ на всю плоскость 2π-периодически и непрерывно. Тогда

$$f(x, y) - S_{nm}(f;\ x, y) = \varphi(x, y) - S_{nm}(\varphi;\ x, y) + h(x, y) - S_{nm}(h;\ x, y).$$

Нетрудно показать, что

$$h(x, y) - S_{nm}(h;\ x, y) = R_{nm}^{u,v}(x, y) + O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Поэтому

$$\sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}^{u,v}(P)} \| f(x, y) - S_{nm}(f;\ x, y) - R_{nm}^{u,v}(x, y) \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}^{u,v}(P)} \| \varphi(x, y) - S_{nm}(\varphi;\ x, y) \|_C + O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Легко видеть, что $\varphi(x, y) \in AH_{\omega_1,\omega_2}$, где A — const. Тем не менее функция $\varphi(x, y)$ допускает асимптотическое приближение, характерное для функций класса H_{ω_1,ω_2}. Чтобы это установить, используем метод оценки кратных интегралов, предложенный в работах [4—6]. Этим и заканчивается доказательство теоремы.

Следствие. *Если $u(x) \in W^1 H_{\omega_1}$, $v(y) \in W^1 H_{\omega_2}$, то при произвольном возрастании натуральных чисел n и m имеет место соотношение*

$$\sup_{f \in H_{\omega_1,\omega_2}^{u,v}(P)} \| f(x, y) - S_{nm}(f;\ x, y) - \bar{R}_{nm}^{u,v}(x, y) \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi^4} \ln n \ln m \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} \min \left\{ \omega_1 \left(\frac{4t}{2n+1} \right),\ \omega_2 \left(\frac{4z}{2m+1} \right) \right\} \sin t \sin z \, dt\, dz +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \ln n \int\limits_0^{\pi/2} \omega_1 \left(\frac{4t}{2n+1} \right) \sin t dt + \frac{2}{\pi^2} \ln m \int\limits_0^{\pi/2} \omega_2 \left(\frac{4z}{2m+1} \right) \sin z dz +$$

$$+ O \left[\min \left\{ \omega_1 \left(\frac{1}{n} \right),\ \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right\} \ln nm + \omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right], \qquad (**)$$

где

$$\widehat{R}_{nm}^{u,v}(x, y) = \frac{v(y)}{\pi} \operatorname{sign} x \operatorname{si}(n(\pi - |x|)) + \frac{u(x)}{\pi} \operatorname{sign} y \operatorname{si}(m(\pi - |y|)) -$$

$$- \frac{s}{\pi^2} \operatorname{sign}(xy) \operatorname{si}(n(\pi - |x|)) \operatorname{si}(m(\pi - |y|)).$$

Если $\omega_1(t)$ и $\omega_2(z)$ — выпуклые модули непрерывности, то в $(**)$ имеет место знак равенства.

Соотношение $(**)$ показывает, как уже отмечалось в [2], что наличие разрыва у функции $f(x, y)$ при $x, y = \pm\pi$ не влияет на скорость сходимости сумм Фурье в точках, удаленных от линий разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон Г. И. Приближение разрывных функций суммами Фурье.— ДАН СССР, 1968, **180**, №5, с. 1033—1036.
2. Подкорытов А. Н. Приближение одного класса функций двух переменных суммами Фурье.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1974, №13, с. 43—50.
3. Степанец А. И. Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1974.— 40 с.
4. Степанец А. И. К одной задаче А. Н. Колмогорова в случае функций двух переменных.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, №5, с. 653—665.
5. Степанец А. И. Об одной экстремальной задаче в пространстве непрерывных функций двух переменных.—В кн.: Вопросы теории приближения функций и ее приложений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 160—178.
6. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье непрерывных периодических функций многих переменных: Препринт 77. 2.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977.—46 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 29.VI 1978 г.,
после исправления — 16.XI 1978 г.