УДК 517.5

В. Н. Коновалов

О наилучших приближениях функций нескольких переменных многоточечными формулами Тейлора

Пусть R^n — евклидово пространство, состоящее из векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, имеющих длину

$$\|x\|_{R^n} = \left(\sum_{m=1}^{n} x_m^2\right)^{1/2};$$

и Ω — произвольное открытое множество в R^n. Через $f(x)$ обозначим произвольное отображение множества Ω из R^n в R^1.

Зафиксировав какой-либо вектор $e \in R^n$ единичной длины и точку $x \in \Omega$, положим

$$f^{(1)}(x)_e = \lim_{\substack{t\to 0,\\ t\in R^1}} \frac{f(x+te)-f(x)}{t}.$$

Если предел в правой части существует и конечен, то он называется первой производной функции $f(x)$ вдоль e. Производные более высоких порядков вводятся по индукции, если для некоторого набора единичных векторов $e_1, \ldots, e_{r-1}$ уже определена производная $f^{(r-1)}(x)_{e_1\ldots e_{r-1}}$ на одномерном интервале, содержащем точку $x \in \Omega$ и лежащем в Ω параллельно единичному вектору e_r. Тогда, в случае существования конечного предела

$$f^{(r)}(x)_{e_1\ldots e_r} = \lim_{\substack{t\to 0,\\ t\in R^1}} \frac{f^{(r-1)}(x+te_r)_{e_1\ldots e_{r-1}} - f^{(r-1)}(x)_{e_1\ldots e_{r-1}}}{t},$$

его величина называется r-й производной вдоль векторов $e_1, \ldots, e_r$ в точке x.

Если $e_1 = \ldots = e_r = e$, то, по определению, положим $f^{(r)}(x)_{e^r} = f^{(r)}(x)_{e_1\ldots e_r}$.

Определим теперь следующие функциональные классы. $W^r(\Omega)_*$ — классы функций, имеющих при любом единичном векторе $e \in R^n$ абсолютно непрерывные производные $f^{(r-1)}(x)_{e^{r-1}}$ на произвольном замкнутом одномерном отрезке $\bar{J}_e$, лежащем в Ω параллельно e, и при этом

$$\|f\|_{W^r(\Omega)_*} = \sup_{\substack{e\in R^n,\\ \|e\|_{R^n}=1}} \sup_{\bar{J}_e\subset\Omega} \operatorname{ess\,sup}_{x\in\bar{J}_e} |f^{(r)}(x)_{e^r}| \leqslant 1.$$

Зафиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, разобьем пространство R_n на сумму конгруэнтных замкнутых кубов q_ε с длиной ребра ε, которые не пересекаются по множествам ненулевой n-мерной меры, и их грани ортогональны векторам стандартного базиса в R^n. Будем рассматривать лишь случай, когда замыкание $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_\varepsilon$ множества $\Omega = \Omega_\varepsilon$ представимо в виде суммы таких кубов.

Из определения классов $W^r(\Omega)_*$ следует, что любая функция $f \in W^r(\Omega)_\varepsilon)_*$ и все ее производные $f^{(s)}(x)_{e^s}$, $s = 1, \ldots, r-1$, могут быть непрерывно продолжены на замыкание $\bar{\Omega}_\varepsilon$ области Ω_ε. Обозначив через $V(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ множество всех вершин всех замкнутых кубов $\bar{q}_\varepsilon$, составляющих $\bar{\Omega}_\varepsilon$, свяжем с каждой вершиной $x_\nu \in V(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ многочлен Тейлора

$$t_{r-1}(f; x, x_\nu) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_\nu)_{e^s} \|x - x_\nu\|^s_{R^n},$$

где $e = \dfrac{x - x_\nu}{\|x - x_\nu\|_{R^n}}$, и некоторую финитную функцию $\delta(x, x_\nu)$ так, чтобы выполнялось тождество $\sum_{x_\nu\in V(\bar{\Omega}_\varepsilon)} \delta(x, x_\nu) \equiv 1$, $x \in \Omega_\varepsilon$. В качестве $\delta(x, x_\nu)$

выберем следующие функции. Зафиксируем некоторую нечетную функцию $\xi(t)$, определенную на вещественной оси R^1 и удовлетворяющую соотношениям

$$t \leqslant \xi(t) \leqslant 1, \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \xi(t) \equiv 1, \text{ если } t > 1.$$

Кроме того, будем предполагать, что при некотором натуральном r и любом $q > 0$ на отрезке $[-1, 1]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2}\{[a + (1+t)^2]^{r/2}[1 - \xi(t)] + [a + (1-t)^2]^{r/2}[1 + \xi(t)] \leqslant (a+1)^{r/2}. \tag{1}$$

Полагая

$$\delta(t) = \frac{1}{2}\left[\xi\left(\frac{2}{\varepsilon}t + 1\right) - \xi\left(\frac{2}{\varepsilon}t - 1\right)\right], \tag{2}$$

определим для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_\nu = (x_{1\nu}, \ldots, x_{n\nu})$ функцию $\delta(x, x_\nu) = \prod\limits_{m=1}^{n} \delta(x_m - x_{m\nu})$. Можно убедиться, что в этом случае

$$\sum_{x_\nu \in V(\overline{\Omega}_\varepsilon)} \delta(x, x_\nu) \equiv 1, \quad x \in \overline{\Omega}_\varepsilon.$$

Будем искать точное значение величины наилучшего приближения на классе $W^r(\Omega_\varepsilon)_*$ многоточечной формулой Тейлора

$$T_{r,\varepsilon}(f; x) = \sum_{x_\nu \in V(\overline{\Omega}_\varepsilon)} t_{r-1}(f; x, x_\nu)\,\delta(x, x_\nu).$$

Отметим, что в этом направлении известен окончательный результат при $r = 1$, полученный в работе [1] для классов даже более общих, чем классы $W^1(\Omega_\varepsilon)_*$. Отметим, что порядковые оценки отклонений многоточечных формул Тейлора на классах дифференцируемых функций установлены в [2].

Для доказательства основной теоремы нам потребуется лемма.

Лемма. *Если действительные числа a и b удовлетворяют условию $b^2 - a^2 \geqslant 0$, то при всех натуральных r выполняются неравенства* $\frac{1}{r!}\left|\frac{d^r}{dt^r}(t^2 + 2at + b^2)^{r/2}\right| \leqslant 1.$

Доказательство. При четных r очевидно, что $\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}(t^2 + 2at + b^2)^{r/2} \equiv 1$. Также очевидно, что если $a^2 = b^2$, то при нечетных r также выполняется равенство $\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}(t^2 + 2at + b^2)^{r/2} \equiv 1$.

Рассмотрим случай, когда r нечетно и $b^2 - a^2 > 0$. Сделав замену переменной $t + a = \tau$, преобразуем исследуемую функцию к виду $(t^2 + 2at + b^2)^{r/2} = (\tau^2 + (b^2 - a^2))^{r/2}$, и докажем, что $\frac{1}{r!}\left|\frac{d^r}{d\tau^r}(\tau^2 + (b^2 - a^2))^{r/2}\right| \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$\varphi(z)_r = \frac{1}{r!}\sqrt{(z + i\sqrt{b^2 - a^2})^r (z - i\sqrt{b^2 - a^2})^r},$$

имеющую две точки ветвления: $z_1 = i\sqrt{b^2 - a^2}$, $z_2 = -i\sqrt{b^2 - a^2}$, лежащие на мнимой полуоси. Разрезав комплексную плоскость по лучам $[i\sqrt{b^2 - a^2}, +i\infty)$, $[-i\sqrt{b^2 - a^2}, -i\infty)$, в полученной односвязной области выделим две односвязные аналитические ветви функции $\varphi(z)_r$. Через $\varphi_+(z)_r$ обозначим ту ветвь, которая совпадает на действительной оси с функцией $\frac{1}{r!}(\sqrt{\tau^2 + (b^2 - a^2)})^r$.

Зафиксировав τ, выберем действительное число $R > \sqrt{\tau^2 + (b^2 - a^2)}$ и обозначим через G_R круг $|z| \leqslant R$ с разрезами по отрезкам $[i\sqrt{b^2 - a^2}, iR]$, $[-i\sqrt{b^2 - a^2}, -iR]$. Границу области G_R обозначим через Γ_R. Полагая $C_R = \{z \mid z = Re^{i\varphi},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$, можем убедиться, что для всех $z \in G_R$ справедливы равенства

$$\varphi_+^{(r)}(z)_r = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{\varphi_+(\zeta)_r}{(\zeta - z)^{r+1}}\,d\zeta = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{\varphi_+(\zeta)_r}{(\zeta - z)^{r+1}}\,d\zeta.$$

Оценивая правую и левую части этого равенства по абсолютной величине, при $z = \tau \in (-R, R)$ получим

$$|\varphi_+^{(r)}(\tau)| \leqslant \frac{[R^2 + (b^2 - a^2)]^{\frac{r}{2}}}{(R - |\tau|)^{r+1}} \cdot R.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, убеждаемся, что $|\varphi_+^{(r)}(\tau)_r| \leqslant 1$. Поэтому будет выполняться неравенство $\frac{1}{r!}\left|\frac{d^r}{dt^r}(t^2 + 2at + b^2)^{r/2}\right| \leqslant 1$. Лемма доказана.

Теорема. *При всех натуральных r выполняются равенства*

$$\sup_{f \in W^r(\Omega_\varepsilon)}\ \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |f(x) - T_{r,\varepsilon}(f; x)| = \frac{1}{r!}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}\right)^r.$$

Доказательство. Получим вначале оценку сверху. Для этого произведем некоторые преобразования

$$\sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |f(x) - T_{r,\varepsilon}(f, x)| = \sup_{x \in \Omega_\varepsilon}\left| f(x) - \sum_{x_\nu \in V(\bar{\Omega}_\varepsilon)} t_{r-1}(f;\ x, x_\nu)\,\delta(x, x_\nu)\right| =$$

$$= \sup_{x \in \Omega_\varepsilon}\left|\sum_{x_\nu \in V(\bar{\Omega}_\varepsilon)} [f(x) - t_{r-1}(f;\ x, x_\nu)]\,\delta(x, x_\nu)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\bar{q}_\varepsilon \in \bar{\Omega}_\varepsilon}\ \sup_{x \in \bar{q}_\varepsilon} \sum_{x_\nu \in V(\bar{\Omega}_\varepsilon)} |f(x) - t_{r-1}(f;\ x, x_\nu)|\,\delta(x, x_\nu),$$

где $V(\bar{q}_\varepsilon)$ — множество всех вершин куба $\bar{q}_\varepsilon$. Полагая $e_\nu = \frac{x - x_\nu}{\|x - x_\nu\|_{R^n}}$ и применяя формулу Тейлора, записанную в виде

$$f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{1}{s!} f^{(s)}(x_\nu)_{e_\nu^s} \|x - x_\nu\|_{R^n}^s +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^1 f^{(r)}(x_\nu + t(x - x_\nu))_{e_\nu^r} (1 - t)^{r-1}\,dt\,\|x - x_\nu\|_{R^n}^r,$$

получаем

$$\sum_{x_\nu\in V(\bar q_\varepsilon)} |f(x)-t_{r-1}(f;\ x, x_\nu)|\,\delta(x, x_\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(r-1)!}\sum_{x_\nu\in V(\bar q_\varepsilon)}\int_0^1 |f^{(r)}(x_\nu+t(x-x_\nu))_{e_\nu^r}|\ (1-t)^{r-1}\,dt\,\|x-x_\nu\|_{R^n}^r\,\delta(x, x_\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r!}\sum_{x_\nu\in V(\bar q_\varepsilon)}\|x-x_\nu\|_{R^n}^r\,\delta(x, x_\nu).$$

Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что центр куба $\bar q_\varepsilon$ находится в начале координат. Полагая

$$x_{mi_m}=\begin{cases}\ \ \dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{если } i_m=1,\\ -\dfrac{\varepsilon}{2}, & \text{если } i_m=-1,\end{cases}$$

представим последнюю сумму в виде

$$\frac{1}{r!}\sum_{x_\nu\in V(\bar q_\varepsilon)}\left(\sum_{m=1}^n |x_m-x_{m\nu}|^2\right)^{r/2}\prod_{m=1}^n\delta(x_m-x_{m\nu})=$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{i_1=-1}^1\cdots\sum_{i_n=-1}^1\left(\sum_{m=1}^n |x_m-x_{mi_m}|^2\right)^{r/2}\prod_{m=1}^n\delta(x_m-x_{mi_m}),$$

где $\sum\limits_{i_m=-1}^1 A_m\overset{\mathrm{df}}{=}A_1+A_{-1}$.

Воспользовавшись определением функций $\delta(t)$ и сделав замены $x_m=$ $=\frac{\varepsilon}{2}\,t_m$, $m=1,\ldots,n$, устанавливаем равенства

$$\frac{1}{r!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r\sum_{i_1=-1}^1\cdots\sum_{i_n=-1}^1\left(\sum_{m=1}^n |i_m-t_m|^2\right)^{r/2}\cdot\frac{1}{2^n}\prod_{m=1}^n[\xi(t_m-i_m+1)-$$

$$-\xi(t_m-i_m-1)]=\frac{1}{r!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i_1=-1}^1\cdots\sum_{i_{n-1}=-1}^1\cdot\frac{1}{2}\left\{\left[\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2+(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t_n)^2\right]^{r/2}[1-\xi(t_n)]+\left[\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2+(1-t_n)^2\right]^{r/2}[1+\xi(t_n)]\right\}\times$$

$$\times\prod_{m=1}^{n-1}[\xi(t_m-i_m+1)-\xi(t_m-i_m-1)].$$

Из неравенства (1) следует, что

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2+(1+t_n)^2\right]^{r/2}[1-\xi(t_n)]+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2+(1-t_n)^2\right]^{r/2}[1+\xi(t_n)]\leqslant\left(1+\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2\right)^{r/2},\right.$$

и поэтому верны соотношения

$$\frac{1}{2^n}\sum_{i_1=-1}^{1}\cdots\sum_{i_n=-1}^{1}\left.\sum_{m=1}^{n}|i_m-t_m|^2\right)^{r/2}\prod_{m=1}^{n}[\xi(t_m-i_m+1)-\xi(t_m-i_m-1)]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i_1=-1}^{1}\cdots\sum_{i_{n-1}=-1}^{1}\left(1+\sum_{m=1}^{n-1}|i_m-t_m|^2\right)^{r/2}\cdot\prod_{m=1}^{n-1}[\xi(t_m-i_m+1)-$$

$$-\xi(t_m-i_m-1)]=\frac{1}{r!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r\frac{1}{2^{n-2}}\sum_{i_1=-1}^{1}\cdots\sum_{i_{n-2}=-1}^{1}\frac{1}{2}\left\{\left[1+\sum_{m=1}^{n-2}|i_m-t_m|^2+\right.\right.$$

$$\left.+(1+t_{n-1})^2\right]^{r/2}\cdot[1-\xi(t_{n-1})]+\left[1+\sum_{m=1}^{n-2}|i_m-t_m|^2+(1-t_{n-1})^2\right]^{r/2}[1+$$

$$\left.+\xi(t_{n-1})]\right|\cdot\prod_{m=1}^{n-2}[\xi(t_m-i_m+1)-\xi(t_m-i_m-1)].$$

Затем необходимо снова воспользоваться неравенством (1). Продолжая этот процесс, в итоге получим оценку

$$\frac{1}{r!}\sum_{x_\nu\in V(\bar{q}_\varepsilon)}\|x-x_\nu\|_{R^n}^r\,\delta(x,x_\nu)\leqslant\frac{1}{r!}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}\right)^r,$$

из которой находим неравенство

$$\sup_{f\in W^r(\Omega_\varepsilon)_*}\ \sup_{x\in\Omega_\varepsilon}|f(x)-T_{r,\varepsilon}(f;x)|\leqslant\frac{1}{r!}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}\right)^r.$$

Докажем, что полученная оценка окончательна. Предполагая, как и прежде, что центр куба $\bar{q}_\varepsilon$ совпадает с началом координат в R^n, рассмотрим функцию $\psi_r(x)=\frac{1}{r!}\|x\|_{R^n}^r$ и покажем, что $\psi_r(x)\in W^r(\Omega_\varepsilon)_*$, а, кроме того,

$$\left|\psi_r(0)-\sum_{x_\nu\in V(\bar{q}_\varepsilon)}t_{r-1}(\psi_r;0,x_\nu)\,\delta(0,x_\nu)\right|=\frac{1}{r!}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}\right)^r.$$

Зафиксировав какую-либо точку $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и произвольный вектор $e=(e_1,\ldots,e_n)$ единичной длины, убедимся в справедливости неравенства

$$|\psi_r(x)_{e^r}|\leqslant 1. \tag{3}$$

Для этого воспользуемся представлениями

$$\psi_r^{(r)}(x)_{e^r} = \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}\|x + te\|_{R^n}^r = \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}\left[\sum_{m=1}^{n}(x_m + te_m)^2\right]^{r/2} =$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}\left[t^2 + 2\left(\sum_{m=1}^{n} e_m x_m\right)t + \sum_{m=1}^{n} x_m^2\right]^{r/2}.$$

Применяя лемму, получаем неравенство (3).

Вычислим величину уклонения многоточечной формулы Тейлора от $\psi_r(x)$ в точке $x = 0$. Полагая $e_\nu = -\dfrac{x_\nu}{\|x_\nu\|_{R^n}}$, имеем

$$\psi_r(0) = \sum_{x_\nu \in V(\bar{q}_\varepsilon)} t_{r-1}(t;\ 0, x_\nu)\,\delta(0, x_\nu) =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \psi_r^{(r)}[(1-t)\,x_\nu]_{e_\nu^r}(1-t)^{r-1}\,dt\,\|x_\nu\|_{R^n}^r.$$

Учитывая, что $\psi_r^{(r)}[(1-t)\,x_\nu]_{e_\nu^r} = (-1)^r$, $\|x_\nu\|_{R^n} = \dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}$, убеждаемся в справедливости равенства

$$\psi_r(0) - \sum_{x_\nu \in V(\bar{q}_\varepsilon)} t_{r-1}(f;\ 0, x_\nu)\,\delta(0, x_\nu) = \frac{(-1)^r}{r!}\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{2}\right)^r.$$

Этим теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что условие (1) выполняется (во всяком случае при четных r), если в качестве $\xi(t)$ брать любые функции, удовлетворяющие на $[-1,\ 1]$ условию $1 + \xi(t) \leqslant (1 + t)^r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С т о р ч а й В. Ф. Приближение непрерывных функций двух переменных некоторыми интерполяционными сплайнами в метрике C.— В кн.: Вопросы теории приближений функций и ее приложений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 186—193.
2. К а л е к и н О. Ю., Л и т в и н О. Н., М а с л о в А. П. Об одной системе нормальных функций.— Мат. физика, 1974, вып. 15, с. 62—65.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 19.XII 1977 г.,
после переработки — 19.IX 1979 г.