УДК 511.36

Ю. В. Мельничук

Размерность Хаусдорфа в диофантовых приближениях p-адических чисел

В работе показано, что при изучении диофантовых приближений p-адических чисел уместно применение размерности Хаусдорфа, построенной на основе меры Хаара. Используя подход из работы [1], вычисляем размерность Хаусдорфа множества целых p-адических чисел, допускающих заданный порядок аппроксимации рациональными числами.

Пусть $Z_p(w)$ — множество тех целых p-адических чисел x, для которых при некотором действительном $w > 0$ неравенство

$$|nx - m|_p < h^{-w}, \tag{1}$$

где $h = \max(|m|, |n|)$, $|\,|_p$— p-адическая норма, выполняется бесконечно часто для целых рациональных m и n.

С помощью записи чисел m и n по степеням p, учитывая свойства сравнений [2], легко получить, что при $w \leqslant 2$ множество $Z_p(w)$ совпадает со всем кольцом целых p-адических чисел Z_p.

Обозначим через $\mu(A)$ меру Хаара, заданную на Z_p и нормированную так, что $\mu(Z_p) = p$ [3]. Известно [4], что $\mu(Z_p(w)) = 0$ при $w > 2$. Очевидно, что $Z_p(w_2) \subset Z_p(w_1)$ при $w_2 > w_1$, но если $w_1 > 2$, то эти множества неразличимы в терминах меры Хаара. Для фиксированного $\alpha \in Z_p$ и действительного t, $1 \geqslant t > 0$, элементарным (эл.) цилиндром C называем множество $C = \{x \in Z_p : |x - \alpha|_p < t\}$. Пусть s — такое натуральное число, что $p^{-s-1} \leqslant t < p^{-s}$, тогда $\mu(C) = p^{-s}$ [3].

Определение. Размерностью Хаусдорфа множества S p-адических чисел, обозначаемой $\dim S$, называется точная нижняя грань таких действительных чисел ρ, что для всякого действительного числа $\lambda > 0$ существует счетное множество $I(\lambda, \rho)$ эл. цилиндров $C_1, C_2, \ldots$, покрывающее S, и выполнены условия

$$\mu(C_j) < \lambda, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{*}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(C_j)^{\rho} < \infty. \tag{**}$$

Теорема. *При $w > 2$ размерность Хаусдорфа множества $Z_p(w)$ равна $\dfrac{2}{w}$.*

Для сравнения отметим, что размерность аналогичного множества действительных чисел равна $\frac{2}{w+1}$ [1, 5].

Анализ решений неравенства (1) показывает, что, не уменьшая общности, можно рассматривать лишь взаимно простые m и n, и $n>0$.

Для каждой пары целых рациональных чисел m, n рассмотрим множество

$$C_{mn}=\{x\in Z_p: |nx-m|_p<h^{-w},\quad h=\max(|m|,|n|)\}. \tag{2}$$

Из свойств сравнений [2] видно, что C_{mn} — эл. цилиндр и его мера $\mu(C_{mn})<ph^{-w}$.

В покрытие $I(\lambda,\rho)$ множества $Z_p(w)$ отнесем те эл. цилиндры C_{mn}, для которых $\mu(C_{mn})<\lambda$. При фиксированном h разных эл. цилиндров C_{mn} не более $5h$. Тогда ряд в определении $\dim Z_p(w)$ мажорируется так:

$$\sum_{C_{mn}\in I(\lambda,\rho)}\mu(C_{mn})^{\rho}<\sum_h 5h\cdot(ph^{-w})^{\rho}\leqslant 5p\sum_h h^{1-\rho w}.$$

Последний ряд сходится при $\rho>\frac{2}{w}$. В силу определения $\dim Z_p(w)$ получим следующее утверждение.

Лемма 1. $\dim Z_p(w)\leqslant\frac{2}{w}$.

Осталось установить обратное неравенство.

Лемма 2. $\dim Z_p(w)\geqslant\frac{2}{w}$.

Для произвольного множества $I(\lambda,\rho)$ эл. цилиндров C, удовлетворяющего условиям (*), (**) определения размерности Хаусдорфа, покажем, что при $\rho=\frac{2-\varepsilon}{w}$, где $\varepsilon>0$ — произвольное действительное число, и достаточно малом λ можно указать такие точки $x\in Z_p(w)$, которые останутся не покрытыми эл. цилиндрами C множества $I(\lambda,\rho)$.

Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел $h_0, h_1, h_2, \ldots$, условия на рост которых сформулируем далее.

Фиксируем $\varepsilon>0$ и множество $I(\lambda,\rho)$ эл. цилиндров C с $\lambda=h_0^{-w}$ и $\rho=\frac{2-\varepsilon}{w}$, удовлетворяющее условиям (*): $\mu(C)<\lambda$ и (**):

$$\sum_{C\in I(\lambda,\rho)}\mu(C)^{\rho}=T<\infty. \tag{3}$$

В множестве $I(\lambda,\rho)$ выделим подмножество I_1 тех эл. цилиндров C, для которых справедливо $\mu(C)\geqslant h_1^{-w}$.

Обозначим через A_1 множество эл. цилиндров C_{mh} (см. (2)), у которых $n=h$, $m<h$ и h — простое число, заключенное в пределах $h_1\leqslant h<2h_1$. Считаем h_1 настолько большим, чтобы можно было воспользоваться асимптотическим законом распределения простых чисел. Тогда в интервале от h_1 до $2h_1$ не меньше $c_1\frac{h_1}{\ln h_1}$ и не больше $c_2\frac{h_1}{\ln h_1}$ простых чисел, где c_1, c_2—константы, близкие к 1, и $c_1<1<c_2$. Следовательно, A_1 состоит не менее чем из $c_1\frac{h_1^2}{\ln h_1}$ непустых эл. цилиндров C_{mh}. Обозначив через $N(M)$ число элементов множества M, получим

$$N(A_1)\geqslant c_1\frac{h_1^2}{\ln h_1}. \tag{4}$$

В отличие от интервалов действительных чисел, эл. цилиндры либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Сравнение мер эл. цилиндров из I_1 и A_1 показывает, что для произвольных $C \in I_1$ и $C_{mh} \in A_1$ возможны два случая: а) $C \cap C_{mh} = \varnothing$; б) $C \cap C_{mh} = C_{mh}$.

Эл. цилиндр $C_{mh} \in A_1$ отнесем к множеству B_1, если для всех эл. цилиндров $C \in I_1$ имеет место случай а), или — к множеству D_1, если существует такой эл. цилиндр $C \in I_1$, что выполняется б). Тогда $A_1 = B_1 \cup D_1$.

Рассмотрим эл. цилиндры $C_{mh} \in A_1$ с одним и тем же h. Пусть k и s такие натуральные числа, что $p^{-k-1} < h \leqslant p^{-k}$, $p^{-s-1} < h^{-w} \leqslant p^{-s}$. Тогда $C_{mh} = \{x \in Z_p : |hx - m|_p \leqslant p^{-s-1}\}$ и из свойств сравнений [2] следует, что каждое число $x \in C_{mh}$ сравнимо с некоторым одним и тем же натуральным числом x' вида $x' = x'_0 + x'_1 p + \ldots + x'_s p^s$, которое условимся называть центром эл. цилиндра C_{mh}. При разных $m < h$ центры соответствующих эл. цилиндров различны. При изменении m от 0 до h значения каждого вычета по модулю p^t, где $1 \leqslant t \leqslant k$, принимаются $\left[\frac{h}{p^t}\right]$ или $\left[\frac{h}{p^t}\right] + 1$ раз. (Квадратные скобки здесь обозначают целую часть действительного числа). Тогда столько же раз среди возможных центров x' эл. цилиндров C_{mh} встретятся такие, у которых в разложении по степеням p коэффициенты x'_0, $x'_1, \ldots, x'_{t-1}$ одинаковы. В случае $t > k$ набор коэффициентов $x'_0, \ldots, x'_{t-1}$ центра встретится не более одного раза.

Изложенное означает, что если рассмотрим эл. цилиндр C меры $\mu(C) = p^{-t+1}$, $0 \leqslant t \leqslant k$, то он будет содержать $\left[\frac{h}{p^t}\right]$ или $\left[\frac{h}{p^t}\right] + 1$ эл. цилиндров C_{mh} с фиксированным h и пересекаться не более чем с одним эл. цилиндром C_{mh}, если $t > k$. В силу дискретности возможных значений мер эл. цилиндров условие $\mu(C) \geqslant p^{-k+1}$ равносильно условию $\mu(C) \geqslant \frac{p}{h}$.

Лемма 3. *При фиксированном простом числе h произвольный эл. цилиндр C пересекается с $\left[\frac{h}{p}\mu(C)\right]$ или $\left[\frac{h}{p}\mu(C)\right] + 1$ эл. цилиндрами вида C_{mh} с $m < h$.*

Для оценки сверху количества $N(D_1)$ элементов множества D_1 разобьем множество D_1 на три части, которые могут иметь общие элементы. Эл. цилиндр $C_{mh} \in A_1$ относим к множеству D'_1, если он пересекается с эл. цилиндром $C \in I_1$ меры $\mu(C) \geqslant \frac{p}{2h_1}$, к множеству D''_1, если $\frac{p}{4h_1^2} \leqslant \mu(C) < \frac{p}{2h_1}$, и, к множеству D'''_1, если $\mu(C) < \frac{p}{4h_1^2}$.

Применяя лемму 3, получим, что эл. цилиндр $C \in I_1$ с мерой $\mu(C) \geqslant \frac{p}{2h_1}$ пересечется не более чем с

$$\sum_{h_1 \leqslant h < 2h_1} \left(\frac{h}{p}\mu(C) + 1\right) \leqslant c_2 \frac{h_1}{\ln h_1}\left(\frac{2h_1}{p}\mu(C) + 1\right) < c_2 \frac{4h_1^2}{\ln h_1}\mu(C)$$

эл. цилиндрами вида C_{mh} для всех простых h, таких что $h_1 \leqslant h < 2h_1$.

Просуммировав по всем эл. цилиндрам $C \in I_1$ с мерой $\mu(C) \geqslant \frac{p}{2h_1}$, приходим к неравенству

$$N(D'_1) < \frac{4c_2}{p} \frac{h_1^2}{\ln h_1} \sum_C \mu(C). \tag{5}$$

Лемма 4. *Для множества $I(\lambda, \rho)$ эл. цилиндров, удовлетворяющих условиям (*) и (**) с $\rho \leqslant 1$, имеет место* $\sum\limits_{C \in I(\lambda,\rho)} \mu(C) < T\lambda^{1-\rho}$, *где T—константа из соотношения* (4).

Из условия (*) следует $\lambda^{-1}\mu(C) < 1$, а по свойству показательной функции $\lambda^{-1}\mu(C) < (\lambda^{-1}\mu(C))^{\rho}$, т. е. $\mu(C) < \lambda^{1-\rho}\mu(C)^{\rho}$. Осталось воспользоваться соотношением (3). В данном случае $\lambda = h_0^{-w}$ и $\rho = \dfrac{2-\varepsilon}{w}$. Тогда $\sum\limits_{C \in I(\lambda,\rho)} \mu(C) < T \cdot h_0^{2-\varepsilon-w}$. Вместе с неравенством (5) это доказывает неравенство

$$N(D_1') < \frac{4c_2 T}{p} \frac{h_1^2}{\ln h_1} h_0^{-w+2-\varepsilon}. \tag{6}$$

Лемма 5. *Пусть C — произвольный эл. цилиндр. Если его мера $\mu(C) < \dfrac{p}{4h_1^2}$, то он пересекается не более чем с одним эл. цилиндром $C_{mh} \in A_1$, если же $\dfrac{p}{4h_1^2} \leqslant \mu(C) < \dfrac{p}{2h_1}$, то не более чем с $c_2 \dfrac{h_1}{\ln h_1}$ эл. цилиндрами $C_{mh} \in A_1$.*

Доказательство. Пусть натуральные числа l, r определяются из неравенств $p^{-l} < \dfrac{1}{2h_1} \leqslant p^{-l+1}$, $p^{-r} < h_1^{-w} \leqslant p^{-r+1}$. Для простого h и $m<h$ определенный соотношением (4) эл. цилиндр C_{mh} может быть представлен так:

$$C_{mh} = \left\{ x \in Z_p : \left| x - \frac{m}{h} \right|_p < h^{-w} \right\}. \tag{7}$$

Тогда центр эл. цилиндра C_{mh} определен вычетом рационального числа $\dfrac{m}{h}$ по модулю p^r.

Допустим, что с эл. цилиндром C меры $\mu(C) < \dfrac{p}{4h_1^2}$ пересекаются два разные эл. цилиндры $C_{mh}, C_{m'h'} \in A_1$. В пересечениях $C \cap C_{mh}$, $C \cap C_{m'h}$ выберем соответственно точки x_1 и x_2. Тогда из соотношений

$$\left| x_1 - \frac{m}{h} \right|_p < h^{-w}, \quad \left| x_2 - \frac{m'}{h'} \right|_p < (h')^{-w}, \quad |x_1 - x_2|_p < \frac{1}{4h_1^2}$$

по свойству неархимедовости p-адической нормы при достаточно большом h_1 получаем, что $\left| \dfrac{m}{h} - \dfrac{m'}{h'} \right|_p < \dfrac{1}{4h_1^2}$. Для простых h и h' последнее эквивалентно

$$|mh' - m'h|_p < \frac{1}{4h_1^2}. \tag{8}$$

Так как $m < h < 2h_1$ и $m' < h' < 2h_1$, то $|mh' - m'h| < 4h_1^2$ и из неравенства (8) следует, что $mh' - m'h = 0$. Вследствие простоты чисел h и h' получаем, что $h = h'$ и $m = m'$. Значит, $C_{mh} = C_{m'h'}$.

Пусть α — центр эл. цилиндра C с мерой $\dfrac{p}{4h_1^2} \leqslant \mu(C) < \dfrac{p}{2h_1}$. Для эл. цилиндров $C_{mh} \in A_1$, которые пересекаются с эл. цилиндром C, имеет место $\left|\alpha - \frac{m}{h}\right|_p < \frac{1}{2h_1}$ или $\alpha - \frac{m}{h} \equiv 0 \pmod{p^{l-1}}$. Эквивалентное сравнение $h\alpha - m \equiv 0 \pmod{p^{l-1}}$ имеет одно решение для каждого h. В интервале от h_1 до $2h_1$ не более $c_2 \frac{h_1}{\ln h_1}$ простых чисел h. Поэтому каждый эл. цилиндр $C \in I_1$ пересекается не более чем с $c_2 \frac{h_1}{\ln h_1}$ эл. цилиндрами из множества A_1.

Множество D_1'' будет содержать наибольшее число эл. цилиндров $C_{mh} \in A_1$, если все эл. цилиндры $C \in I_1$ будут иметь наибольшую меру. Так как $\frac{p}{4h_1^2} \leqslant \mu(C) < \frac{p}{2h_1}$, то наибольшее возможное значение меры $\mu(C) = p^{-l}$. Из соотношения (3) следует, что число N'' эл. цилиндров с такой мерой в покрытии $I(\lambda, \rho)$ удовлетворяет $N''(p^{-l})^{\frac{2-\varepsilon}{w}} \leqslant T$. Отсюда $N'' \leqslant Tp^{\frac{(2-\varepsilon)l}{w}} < T(2h_1)^{\frac{2-\varepsilon}{w}}$. Это позволяет сразу получить оценку для $N(D_1'')$:

$$N(D_1'') < 2c_2 T \cdot \frac{h_1^{1+\frac{2-\varepsilon}{w}}}{\ln h_1}. \tag{9}$$

Заметим, что $\frac{2-\varepsilon}{w} < 1$.

По лемме 4 для оценки сверху числа $N(D_1''')$ достаточно знать оценку сверху числа эл. цилиндров $C \in I_1$ с мерой $\mu(C) < \frac{p}{4h_1^2}$. Этих последних в множестве I_1 не более $Th_1^{2-\varepsilon}$, что следует из соотношения (3) и того, что для $C \in I_1$ справедливо $\mu(C) \geqslant h_1^{-w}$. Итак,

$$N(D_1''') < T \cdot h_1^{2-\varepsilon}. \tag{10}$$

Если выбрать h_1 настолько большим, чтобы $h_1 > h_0^w$ и $h_1^\varepsilon > h_0^{w-2+\varepsilon}$, то сравнение оценок (7), (9), (10) показывает, что при достаточно большом h_1 справедливо неравенство

$$N(D_1) < \frac{8c_2 T}{c_1 p} N(A_1) h_0^{-w+2-\varepsilon}. \tag{11}$$

Так как $N(B_1) = N(A_1) - N(D_1)$, то $N(B_1) > N(A_1)\left(1 - \frac{8c_2 T}{c_1 p} h_0^{-w+2-\varepsilon}\right)$. Если выбрать h_0 достаточно большим и соблюсти при выборе h_1 предыдущие соотношения между h_0 и h_1, то получим

$$N(B_1) > \frac{1}{2c_1} N(A_1) > \frac{1}{2} \frac{h_1^2}{\ln h_1}. \tag{12}$$

Мера эл. цилиндра $C_{mh} \in B_1$ больше $(2h_1)^{-w}$. Поэтому

$$\sum_{C_{mh} \in B_1} \mu(C_{mh}) > N(B_1) \cdot (2h_1)^{-w} > \frac{1}{(2h_1)^w} \cdot \frac{h_1^2}{\ln h_1}. \tag{13}$$

По аналогии с A_1 обозначим через A_2 множество тех эл. цилиндров C_{mh}, у которых h — простое число из интервала $h_2 \leqslant h < 2h_2$. Через I_2 — множество тех эл. цилиндров $C \in I(\lambda, \rho)$, мера которых удовлетворяет $h_2^{-w} \leqslant \mu(C) < h_1^{-w}$. Аналогично предыдущему определяем множества B_2, D_2

и с помощью тех же рассуждений получаем $A_2 = B_2 + D_2$:

$$N(A_2) > c_1 \frac{h_2^2}{\ln h_2}, \quad N(D_2) < \frac{8c_2T}{c_1p} N(A_2) \cdot h_1^{-w+2-\varepsilon}. \tag{14}$$

При этом соотношение между величинами h_2 и h_1 должно быть таким же, как и между h_1 и h_0 на предыдущем шаге.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь эл. цилиндры из множества $B_1 \cap B_2$. Имеем $B_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 + B_1 \cap D_2$ и

$$N(B_1 \cap B_2) > N(B_1 \cap A_2) - N(D_2). \tag{15}$$

Дополнительно к прежним условиям на h_2 и h_1 потребуем, чтобы $h_2 \geqslant p2^w h_1^w$. Тогда произвольный эл. цилиндр $C_{mn} \in B_1$ по лемме 3 будет при фиксированном простом h содержать не менее $\left[\frac{h}{p}\mu(C_{mn})\right]$ эл. цилиндров $C'_{mn} \in A_2$. Возможных значений h для эл. цилиндров $C'_{mh} \in A_2$ не менее $c_1 \frac{h_2}{\ln h_2}$ штук.

Поэтому произвольный эл. цилиндр $C_{mn} \in B_1$ содержит не менее, чем $c_1 \frac{h_2}{\ln h_2}\left[\frac{h_2}{p}\mu(C_{mn})\right] > \frac{1}{2p} \cdot \frac{h_2^2}{\ln h_2}\mu(C_{mn})$ эл. цилиндров из A_2.

Просуммируем по всем $C_{mn} \in B_1$ и получим

$$N(B_1 \cap A_2) > \sum_{C_{mn} \in B_1} \frac{1}{2p} \cdot \frac{h_2^2}{\ln h_2} \cdot \mu(C_{mn}) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{h_2^2}{\ln h_2} \sum_{C_{mn} \in B_1} \mu(C_{mn}).$$

К оценке последней суммы применим неравенство (13):

$$N(B_1 \cap A_2) > \frac{1}{2p} \cdot \frac{h_1^2 h_2^2}{(2h_1)^w \ln h_1 \ln h_2}. \tag{16}$$

Подставляя соотношения (14) и (16) в (15), получаем

$$N(B_1 \cap B_2) > \left(\frac{h_1^2}{2 \cdot (2h_1)^w \ln h_1} - \frac{8c_2T}{c_1} h_1^{-w+2-\varepsilon}\right) \frac{h_2^2}{p \ln h_2}.$$

При достаточно большом h_1 справедливо неравенство

$$N(B_1 \cap B_2) > \frac{1}{4p} \cdot \frac{h_1^w \cdot h_2^2}{(2h_1)^w \ln h_1 \ln h_2}. \tag{17}$$

Так как мера эл. цилиндра из B_2 не меньше $(2h_2)^{-w}$, то

$$\sum_{C_{mh} \in B_1 \cap B_2} \mu(C_{mh}) > \frac{1}{4p} \cdot \frac{(h_1 h_2)^2}{(2h_1 \cdot 2h_2)^w \ln h_1 \ln h_2}. \tag{18}$$

Аналогично определим множества A_3, I_3, B_3, D_3 и получим, что

$$\sum_{C_{mh} \in B_1 \cap B_2 \cap B_3} \mu(C_{mh}) > \frac{1}{2^3 p^2} \cdot \frac{(h_1 h_2 h_3)^2}{(2h_1 \cdot 2h_2 \cdot 2h_3)^w \ln h_1 \ln h_2 \ln h_3}, \tag{19}$$

и т. д. по индукции построим множество B_i для произвольного i, получая оценку типа (19).

Обозначим через $\overline{B}_i$ теоретико-множественную сумму эл. цилиндров множества B_i. Каждое множество $\overline{B}_i$ не пусто в силу оценок вида (12), (18), (19), ..., и, кроме того, замкнуто, так как каждый эл. цилиндр C_{mh} замкнут. Поэтому множество $\overline{B} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i$ не пусто.

По построению множество $\overline{B}_1$ не имеет общих точек с эл. цилиндрами $C \in I(\lambda, \rho)$ с мерой $\mu(C) \geqslant h_1^{-w}$, множество $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$ не пересекается с эл. цилиндрами C из $I(\mu, \rho)$ с мерой $\mu(C) \geqslant h_2^{-w}$. Множество $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \ldots \ldots \cap \overline{B}_i$ не пересекается с эл. цилиндрами C из $I(\lambda, \rho)$, мера которых $\mu(C) \geqslant h_i^{-w}$. Поэтому множество $\overline{B}$ не пересекается с эл. цилиндрами C из $I(\lambda, \rho)$.

Очевидно, что точки множества $\overline{B}$ принадлежат множеству $Z_p(w)$. Таким образом, для произвольного множества $I(\lambda, \rho)$ с $\rho = \dfrac{2-\varepsilon}{w}$, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условиям (*), (**) определения размерности Хаусдорфа, мы указали процесс, приводящий к множеству $\overline{B}$ таких точек из $Z_p(w)$, которые не покрыты эл. цилиндрами из множества $I(\lambda, \rho)$. Это равносильно утверждению леммы 2, вместе с леммой 1, доказывающей теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Besicovitch A. S. Sets of fractional dimention (IV): On rational approximation to real numbers.— J. London Math. Soc., 1934, **9**, p. 126—131.
2. Виноградов И. М. Основы теории чисел.— М.: Наука, 1965.— 172 с.
3. Спринджук В. Г. Проблема Малера.— Минск: Наука и техника, 1967.— 184 с.
4. Jarnik V. Sur les approximations diophantiennes des nombres P — adiques.— Revista Ci Lima, 1945, **47**, p. 489—505.
5. Jarnik V. Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. — Мат. сб., 1929, **36**, с. 371—382.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
2.III 1979 г.