УДК 517.946

А. К. Прикарпатский

Геометрическая структура и Бэклунд-преобразование одной системы нелинейных эволюционных уравнений в частных производных

1. В настоящей заметке рассмотрим систему нелинейных эволюционных уравнений

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = 4\varphi, \qquad i\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\,2\varphi\,|\,\psi\,|^2, \tag{1}$$

где функции $\psi\,(x,\,t)$ и $\varphi\,(x,\,t)$ — комплексные.

Для системы (1), исходя из ее конкретной формы и основываясь на геометрической теории дифференциальных уравнений в частных производных Э. Картана [1], прямым путем получим представление типа Лакса [2], а также Бэклунд-преобразование [3], дающее возможность генерировать решения системы (1) при помощи какого-то одного известного решения.

2. Для дальнейшего анализа сделаем в системе (1) замену переменных $\dfrac{t+x}{2} = x'$, $\dfrac{t-x}{2} = t'$ и для удобства будем писать вместо x' и t' x и t.

Тогда получим эквивалентную систему уравнений

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=4\varphi,\qquad i\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-2\varphi|\psi|^2. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение, следуя теории Э. Картана [1], систему дифференциальных 2-форм:

$$\begin{aligned}\omega_1&=id\psi\wedge dx-4\varphi dt\wedge dx,\quad \omega_2=id\psi^*\wedge dx+4\varphi^* dt\wedge dx,\\ \omega_3&=id\varphi\wedge dt+2\varphi|\psi|^2dx\wedge dt,\quad \omega_4=id\varphi^*\wedge dt-2\varphi^*|\psi|^2dx\wedge dt.\end{aligned} \tag{3}$$

Эта система 2-форм эквивалентна исходной системе уравнений (2) тогда и только тогда, когда она составляет замкнутый идеал в алгебре Грассмана дифференциальных форм, т. е. справедливы равенства

$$d\omega_i=\sum_{k=1}^{4}\chi_i^k\wedge\omega_k, \tag{4}$$

где χ_i^k — некоторые 1-формы. Справедливость условия замкнутости (4) для системы (2) проверяется непосредственным вычислением.

Применим к идеалу дифференциальных 2-форм $\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$ метод продолжения при помощи 1-форм Ω^k ($k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$), состоящий в том, что продолженный идеал $\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \Omega^1,\ \Omega^2,\ \ldots,\Omega^n\}$ — также замкнут.

Этот метод был впервые эффективно использован для решения аналогичной задачи в работе [4] для нелинейного уравнения Кортевега — де Фриза.

Итак, следуя [4], положим

$$\Omega^k=-d\xi^k+iF^kdx+iG^kdt. \tag{5}$$

Условие замкнутости продолженного идеала означает, что

$$d\Omega^k=\sum_{i=1}^{4}f^{ki}\omega_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^k\wedge\Omega^i, \tag{6}$$

т. е. должно существовать множество n^2 1-форм η_i^k и множество $4n$ функций f^{ki} таких, что (6) удовлетворяется тождественно. Это условие приводит к уравнениям для неизвестных функций $F^k=F^k(\psi,\psi^*,\ \varphi,\ \varphi^*,\ \xi)$ и $G^k=G^k(\psi,\ \psi^*,\ \varphi,\ \varphi^*,\ \xi)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^k}{\partial\varphi}=\frac{\partial F^k}{\partial\varphi^*}=0,\qquad \frac{\partial G^k}{\partial\psi}=\frac{\partial G^k}{\partial\psi^*}=0,\\ 4\frac{\partial F^k}{\partial\psi}\varphi-4\frac{\partial F^k}{\partial\psi^*}\varphi^*+2\frac{\partial G^k}{\partial\varphi}\varphi|\psi|^2-2\frac{\partial G^k}{\partial\varphi^*}\varphi^*|\psi|^2=[GF]^k,\end{gathered} \tag{7}$$

где введено обозначение $[G,F]^k=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(G^i\frac{\partial F^k}{\partial\xi^i}-F^i\frac{\partial G^k}{\partial\xi^i}\right)$, имеющее все свойства скобок Ли.

Уравнения (7) допускают решение вида

$$F^k=x_1^k+x_2^k\psi+x_3^k\psi^*+x_4^k\psi\psi^*;\qquad G^k=x_5^k+x_6^k\varphi+x_7^k\varphi^*, \tag{8}$$

где функции x_i^k зависят только от переменных ξ^i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$), именуемых в [4] «псевдопотенциалами». Следствием (7) и (8) являются уравнения только на функции x_i^k (ξ):

$$[x_1x_5]=[x_2x_5]=[x_3x_5]=[x_4x_5]=0,\quad [x_3x_7]=0,\quad [x_2x_6]=0,\quad [x_1x_6]=-4x_2,$$
$$[x_3x_6]=-4x_4,\quad [x_4x_6]=-2x_6,\quad [x_1x_7]=4x_3,\quad [x_2x_7]=4x_4,\quad [x_4x_7]=2x_7; \tag{9}$$

запись $[x_ix_j]$ — производная Ли векторного поля $x_j=\sum\limits_{k=1}^{n}x_j^k\dfrac{\partial}{\partial\xi^k}$ по полю $x_i=\sum\limits_{k=1}^{n}x_i^k\dfrac{\partial}{\partial\xi^k}$ с компонентами [5] $[x_ix_j]^l=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_i^k\dfrac{\partial x_j^l}{\partial\xi^k}-x_j^k\dfrac{\partial x_i^l}{\partial\xi^k}\right)$.

Используя тождества Якоби для скобок Ли, можно установить, что множество соотношений (9) сводится к трехмерной алгебре Ли gl (2), если положить $x_1=-\lambda^2x_4$, $x_2=-\lambda^2x_6$, $x_3=-\lambda^2x_7$, $x_5=0$, где λ — произвольное комплексное число:

$$[x_1x_2]=4\lambda^2x_2,\quad [x_1x_3]=-4\lambda^2x_3,\quad [x_2x_3]=4x_1.$$

3. Алгебре Ли gl (2), построенной в п. 2, соответствует представление дифференциальными операторами первого порядка в пространстве функций, зависящих от двух переменных:

$$x_1=-2\lambda^2\xi^1\frac{\partial}{\partial\xi^1}+2\lambda^2\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi^2},\quad x_2=-2\lambda\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi^1},\quad x_3=-2\lambda\xi^1\frac{\partial}{\partial\xi^2}. \tag{10}$$

Используя представление (10), из формул (5) и (8) получим уравнения на «псевдопотенциалы» ξ^1 и ξ^2:

$$i\frac{\partial\xi^1}{\partial t}=\frac{2\xi^2}{\lambda}\varphi,\quad i\frac{\partial\xi^2}{\partial t}=\frac{2\xi^1}{\lambda}\varphi^*,$$
$$i\frac{\partial\xi^1}{\partial x}=2\lambda\psi\xi^2-(|\psi|^2-2\lambda^2)\xi^1,\quad i\frac{\partial\xi^2}{\partial x}=2\lambda\psi^*\xi^1+(|\psi|^2-2\lambda^2)\xi^2. \tag{11}$$

Ввиду линейности правых частей равенств (11) по переменным ξ^1 и ξ^2 перепишем их в матричном виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi=\frac{2}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & \varphi\\ \varphi^* & 0\end{pmatrix}\xi,\quad \xi=\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix},\quad i\frac{\partial}{\partial x}\xi=2\lambda\begin{pmatrix}0 & \psi\\ \psi^* & 0\end{pmatrix}\xi-$$
$$-(|\psi|^2-2\lambda^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\xi. \tag{12}$$

Условие совместности равенств (12) в виде $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}=\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\partial x}$ означает, что

$$[X_\lambda, T_\lambda]=0, \tag{13}$$

где операторы X_λ и T_λ имеют вид

$$X_\lambda=i\frac{\partial}{\partial x}-2\lambda\begin{pmatrix}0 & \psi\\ \psi^* & 0\end{pmatrix}+(|\psi|^2-2\lambda^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$
$$T_\lambda=i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & \varphi\\ \varphi^* & 0\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Возвратившись в (14) к прежним переменным x и t, из (13) получим представление типа Лакса для исходной системы (1) нелинейных эволюционных уравнений в частных производных. Это представление дает возможность найти точные решения системы нелинейных уравнений (1) в двух случаях:

быстроубывающих условий на бесконечности по переменной x методом обратной задачи рассеяния [6], и периодических условий по переменной x при помощи метода, разработанного в [7] для знаменитого уравнения Кортевега — де Фриза.

4. Приступим к поиску Бэклунд-преобразования для системы уравнений (2), или, что то же, для системы (1). Запишем общий вид преобразования Бэклунда в виде

$$\psi' = \psi'(\psi, \psi^*, \varphi, \varphi^*, \xi^1, \xi^2), \qquad \varphi' = \varphi'(\psi, \psi^*, \varphi, \varphi^*, \xi^1, \xi^2), \tag{15}$$

и наложим на функции ψ' и φ' необходимое условие: система дифференциальных 2-форм

$$\begin{aligned} &\omega_1' = id\psi' \wedge dx - 4\varphi' dt \wedge dx, \qquad \omega_2' = id\psi'^* \wedge dx + 4\varphi'^* dt \wedge dx, \\ &\omega_3' = id\varphi' \wedge dt + 2\varphi' |\psi'|^2 dx \wedge dt, \qquad \omega_4' = id\varphi'^* \wedge dt - 2\varphi'^* |\psi'|^2 dx \wedge dt \end{aligned} \tag{16}$$

принадлежит продолженному идеалу $\{\omega_1, \ldots, \omega_4, \Omega^1, \Omega^2\}$, т. е. существуют такие функции $\alpha_k^1, \ldots, \alpha_k^4$ и такие дифференциальные 1-формы β_{ik} и γ_{ik}, что

$$\omega_k' = \sum_{i=1}^{4} \alpha_k^i \omega_i + \sum_{i=1}^{2} \beta_{ik} \wedge \Omega^k + \sum_{i=1}^{2} \gamma_{ik} \wedge \Omega^{*k}. \tag{17}$$

Условие (17) вместе с представлением (15) дает возможность получить при помощи простых, но длинных вычислений, следующий результат:

$$\begin{aligned} \psi' = \frac{\lambda^* \left|\frac{\xi^2}{\xi^1}\right|^2 + \lambda}{\lambda \left|\frac{\xi^2}{\xi^1}\right|^2 + \lambda^*} \psi + \frac{\left(\frac{\xi^2}{\xi^1}\right)^* [(\lambda^*)^2 - \lambda^2]}{\lambda \left|\frac{\xi^2}{\xi^1}\right|^2 + \lambda^*}, \qquad \varphi' = \frac{\lambda^2 - (\lambda^*)^2 |y|^4}{|\lambda|^2 (1 - |y|^4)} \varphi + \\ + \frac{(y^*)^2 [(\lambda^*)^2 - \lambda^2]}{(1 - |y|^4) |\lambda|^2} \varphi^*. \end{aligned} \tag{18}$$

Эти равенства вместе с уравнениями (12) для функций ξ^1 и ξ^2 и составляют Бэклунд-преобразование системы нелинейных уравнений (2).

5. В заключение отметим, что преобразование Бэклунда (18), полученное на основе геометрической теории Э. Картана уравнений в частных производных, можно также найти с помощью методов, развитых в [8, 9] для определенного класса нелинейных эволюционных уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermann R. E. Cartan's Geometric Theory of partial differential equations.— Adv. in Math., 1965, **1**, p. 265—317.
2. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.— Comm. Pure Appl. Math., 1968, **21**, p. 467—490.
3. Lamb G. L. (jr). Bäclund transformations for certain nonlinear evolution equations.— Journ. of Math. Phys., 1974, **15**, No 12, p. 2157—2165.
4. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. Prolongation structures of nonlinear evolution equation.— Journ. of Math. Phys., 1975, **16**, No 1, p. 1—7.
5. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.—М.: Мир, 1973.— 188 с.
6. Фаддеев Л. Д. Обратная задача теории рассеяния.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1971, с. 100—190.
7. Марченко В. А. Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза.— Мат. сборник, 1974, **95**, вып. 3, с. 331—356.
8. Hirota R. Anew form of Bäclund transformation and its relation to the Inverse Scattering Problem.— Progress of Theor. Phys., 1974, **52**, №5, p. 1498—1512.
9. Calogero F., Degasperic A. Nonlinear evolution equations solvable by the Inverse Spectral Transform.— Nuovo Cimento, 1976, 32B, No 2, p. 201—242.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
15.V 1978 г.