УДК 518:517.91

В. А. Ронто

Об определении начальных значений решений нелинейных краевых задач методом продолжения решения по параметру

В данной заметке для обыкновенных дифференциальных уравнений приводится способ приближенного нахождения начальных значений решений краевых задач, в том числе и периодических, основанный на методе продолжения решения по параметру.

С помощью оператора сдвига по траекториям решение нелинейной краевой задачи сводится к решению определенной системы нелинейных уравнений относительно начального значения с последующим интегрированием задачи Коши с этим начальным условием. Часто для отыскания неподвижных точек уравнений, определяющих начальные значения применяют метод Ньютона [1, 2]. Для сходимости вычислений по методу Ньютона необходима «достаточная» близость начального приближения к искомому решению. При интегрировании общих двухточечных и периодических краевых задач этому требованию, как правило, трудно удовлетворить. Поэтому вычислительный процесс в большинстве случаев расходится и начальное приближение подбирается путем многократных экспериментальных просчетов.

Гораздо больший произвол в выборе начального приближения, обеспечивающего сходимость вычислений, позволяют схемы, основанные на методе продолжения решения по параметру [3].

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

при заданных линейных двухточечных краевых условиях

$$Ax(a) + Bx(b) = d, \tag{2}$$

где x, f — точки n-мерного евклидова пространства E_n, вектор-функция $f(t, x)$ и матрица Якоби $F(t, x) = \left(\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right)$ определены и непрерывны в области $(t, x) \in [a, b] \times D$, D — ограниченная замкнутая область E_n, A и B — постоянные матрицы.

Предположим, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x = x(t)$ в некоторой области изменения (t, x). Если бы было известно начальное значение

$$x(a) = x_a \tag{3}$$

момент времени $t = a$, то решение исходной краевой задачи свелось бы к адаче Коши (1), (3).

Оператор сдвига по траекториям $U(b, a, x_a)$ системы уравнений (1) за время от $t = a$ до $t = b$ позволяет формально легко выразить значение $x(t)$ в точке $t = b$ через значение x_a:

$$x(b) = U(b, a, x_a)\, x_a. \tag{4}$$

Следовательно, начальное значение x_a определяется как неподвижная точка операторного уравнения

$$Ax_a + BU(b, a, x_a)\, x_a = d. \tag{5}$$

Хотя для уравнения (1) оператор сдвига по траекториям $U(\tau, a, x_a)$ из точки $t = a$ в точку $t = \tau$ в явном виде не задан, известно [4], что он непрерывен по совокупности переменных и что его производной Фреше U' (τ,

a, $x_a^{(k)}$) в точке $x_a^{(k)}$ является оператор сдвига по траекториям из точки $t =$ $= a$ в точку $t = \tau$ линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x^{(k)}(t))\, x, \tag{6}$$

где $x^{(k)}(t)$ — решение задачи Коши для системы (1) при начальном условии $x(a) = x_a^{(k)}$, $F(t, x^{(k)}(t))$ — матрица Якоби вектор-функции $f(t, x)$, вычисленная при $x = x^{(k)}(t)$.

Ввиду нелинейности уравнения (5) определить начальное значение краевой задачи можно лишь итерационными методами. Ряд алгоритмов приближенного решения уравнения (5) можно получить на основе метода продолжения решения по параметру. Следуя основной идее этого метода, совершим переход от заданного уравнения (5) к новой системе

$$q(x_a, \lambda) = 0, \tag{7}$$

причем параметр λ введем так, чтобы при $\lambda = 0$ имели уравнение с известным или легко определяемым решением $x_a(0) = \xi$, а при $\lambda = 1$ — исходную систему с искомым решением $x_a(1) = x_a$.

Если уравнение (7) имеет решение при каждом $\lambda \in [0, 1]$, а вектор-функция $q(x_a, \lambda)$ непрерывна вместе со своими производными, решение $x_a(\lambda)$ системы (7) будет непрерывной функцией от λ. В то же время $x_a(\lambda)$ будет решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_a(\lambda)}{d\lambda} = -Q^{-1}(x_a, \lambda)\frac{\partial q}{\partial \lambda} \tag{8}$$

при начальном условии

$$x_a(0) = \xi, \tag{9}$$

которая получается путем дифференцирования уравнения (7) по λ. Здесь $Q(x_a, \lambda) = \left(\frac{\partial q(x_a, \lambda)}{\partial x_a}\right)$ — матрица Якоби вектор-функции $q(x_a, \lambda)$, $\frac{\partial q}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial \lambda}, \frac{\partial q_2}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial q_n}{\partial \lambda}\right)$. Так что известные условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши (8), (9), гарантируют возможность осуществления вычислений по методу продолжения решения по параметру. Очевидно, решение $x_a(\lambda)$ задачи Коши (8), (9) при $\lambda = 1$ дает корень уравнения (5) $x_a(1) = x_a$.

Итак, значения $x_a(\lambda)$ могут быть получены двумя способами, а именно: интегрированием задачи Коши (8), (9) любым из численных методов и непосредственным решением системы (7), например по методу Ньютона при дискретном изменении значений параметра с равномерным шагом $\Delta\lambda = \frac{1}{m}$;

$$0 = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_m = 1, \quad \lambda_i = i\Delta\lambda. \tag{10}$$

Пусть $\det A \neq 0$ и $d \not\equiv 0$, тогда в систему (5) параметр можно ввести множителем при нелинейной части:

$$Ax_a + \lambda BU(b, a, x_a)\, x_a = d. \tag{11}$$

Очевидно при $\lambda = 0$ последнее уравнение вырождается в линейную систему

$$Ax_{a,\lambda_0} = d, \tag{12}$$

а при $\lambda = 1$ превращается в исходное уравнение (5). Пусть $x_{a,\lambda_0} = \xi$ — корень системы (12). В силу уравнения (8) начальное значение, определяющее решение краевой задачи (1), (2), получается путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx_a}{dt} = -[A + \lambda BU'(b, a, x_a)]^{-1} BU(b, a, x_a) x_a \quad (13)$$

на отрезке [0, 1] при начальном условии

$$x_a(0) = \xi. \quad (14)$$

При вычислении $U'(b, a, x_a)$ можно воспользоваться приближенными формулами нахождения фундаментальной матрицы соответствующей линейной системы (6), приведенными в работах [2, 5].

Рассмотрим способ нахождения начального значения краевой задачи (1), (2), когда уравнение (11) для каждого значения параметра λ на сетке (10) решается по методу Ньютона. При $\lambda = 0$ решением системы (11) является $x_{a,\lambda_0} = \xi$. Применим к уравнению

$$Ax_a + \lambda_i BU(b, a, x_a) x_a = d \quad (15)$$

метод Ньютона. Примем за начальное приближение $x^{(0)}_{a,\lambda_i}$ к решению x_{a,λ_i} уравнения (11) приближенное решение $x^{(r_{i-1})}_{a,\lambda_{i-1}}$ этого же уравнения, полученное по методу Ньютона на r_{i-1}-м шаге при предыдущем значении $\lambda = \lambda_{i-1}$. Тогда для каждого значения параметра λ_i на сетке (10) приближенное значение решения x_{a,λ_i} уравнения (11) может быть найдено по схеме:

$$[A + \lambda_i BU'(b, a, x^{(k)}_{a,\lambda_i})]\,\Delta x^{(k)}_{a,\lambda_i} = d - Ax^{(k)}_{a,\lambda_i} - \lambda_i BU(b, a, x^{(k)}_{a,\lambda_i})\, x^{(k)}_{a,\lambda_i},$$

$$x^{(k+1)}_{a,\lambda_i} = x^{(k)}_{a,\lambda_i} + \Delta x^{(k)}_{a,\lambda_i}, \qquad k = 0, 1. \ldots, r_i, \quad (16)$$

$$x^{(0)}_{a,\lambda_i} = x^{(r_{i-1})}_{a,\lambda_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad x^{(r_0)}_{a,\lambda_0} = x_{a,\lambda_0} = \xi.$$

Заметим, если в соотношении (16) принять $\lambda_i = 1$, то оно превращается в метод Ньютона, примененный непосредственно к уравнению (5).

При реализации вычислений по формулам (16) удобно предварительно каким-нибудь численным методом с шагом дискретизации $\frac{h}{2}$ найти решение $W^{(i)}(t)$ уравнения (1) на отрезке $[a, b]$ при начальном условии $x_a = x^{(k)}_{a,\lambda_i}$. Тогда $U(b, a, x^{(k)}_{a,\lambda_i})\, x^{(k)}_{a,\lambda_i} = W^{(i)}(b)$.

Значение фундаментальной матрицы $\Phi_{W^{(i)}}(b)$ для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = F(t, W^{(i)}(t))\, x, \quad (17)$$

необходимое для определения производной $U'(b, a, x^{(k)}_{a,\lambda_i})$, может быть вычислено, например, с помощью метода Рунге—Кутта четвертого порядка с точностью до $o(h^4)$ по формуле

$$\Phi_{W^{(i)}}(b) = \prod_{j=N-1}^{0} M^{(i)}_j, \quad (18)$$

где

$$M^{(i)}_j = E + \frac{1}{6}\left\{h\left[F(t_j, W^{(i)}(t_j)) + 4F\left(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\left(t_j + \frac{h}{2}\right)\right) + \right.\right.$$

$$+ F(t_{j+1}, W^{(i)}(t_{j+1}))\Big] + h^2\Big[F\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big) F(t_j, W^{(i)}(t_j)) +$$

$$+ F^2\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big) + F(t_{j+1}, W^{(i)}(t_{j+1})) F\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big) +$$

$$+ \frac{h^3}{2}\Big[F^2\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big) F(t_j, W^{(i)}(t_j)) +$$

$$+ F(t_{j+1}, W^{(i)}(t_{j+1})) F^2\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big)\Big] +$$

$$+ \frac{h^4}{4} F(t_{j+1}, W^{(i)}(t_{j+1})) F^2\Big(t_j + \frac{h}{2}, W^{(i)}\Big(t_j + \frac{h}{2}\Big)\Big) F(t_j, W^{(i)}(t_j))\Big\},$$

$h = \dfrac{b-a}{N}$ — шаг интегрирования на сетке $a = t_0$, $t_1 = a + h, \ldots, t_i = a + jh, \ldots, t_N = a + Nh = b$.

На практике при нахождении значений $W^{(i)}(t_j)$ целесообразно одновременно вычислять матрицы $M_j^{(i)}$ и накапливать произведение $\Pi M_j^{(i)}$. Тогда, определив величину $W^{(i)}(b)$, сразу же будем иметь значение фундаментальной матрицы $\Phi_{W^{(i)}}(b)$.

Выясним, какое влияние на реализацию вычислений с помощью метода продолжения решения по параметру оказывает тот факт, что за начальное приближение при текущем значении параметра $\lambda = \lambda_i$ выбрано не точное значение решения $x_{a,\lambda_{i-1}}$ уравнения (11) при $\lambda = \lambda_{i-1}$, а r_{i-1}-е приближение $x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})}$ к нему, найденное методом Ньютона.

Пусть при $\lambda = \lambda_{i-1}$ вектор $x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})}$ для уравнения (11) дает невязку

$$\varepsilon_{\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})} = d - Ax_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})} - \lambda_{i-1} BU(b, a, x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})})\, x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})}. \tag{19}$$

Определим невязку, которую дает вектор $x_{a,\lambda_i}^{(0)} = x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})}$ уравнению (11) при $\lambda = \lambda_i$:

$$\varepsilon_{\lambda_i}^{(0)} = d - Ax_{a,\lambda_i}^{(0)} - (\lambda_{i-1} + \Delta\lambda) BU(b, a, x_{a,\lambda_i}^{(0)})\, x_{a,\lambda_i}^{(0)} =$$

$$= \varepsilon_{\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})} - \Delta\lambda BU(b, a, x_{a,\lambda_i}^{(0)})\, x_{a,\lambda_i}^{(0)}. \tag{20}$$

Предположим, что для некоторой области изменения начального значения

$$G : \| x_a - \xi \| \leqslant S, \qquad G \subset D \tag{21}$$

все решения задачи Коши для уравнения (1) на отрезке $[a, b]$ ограничены по норме константой L и правые части системы (1) в области D дважды непрерывно дифференцируемы по x. Пусть, кроме того, в сфере (21) справедливы условия

$$\| [A + BU'(b, a, x_a)]^{-1} \| \leqslant P, \tag{22}$$

$$P \| A\xi + BU(b, a, \xi)\xi - d \| \leqslant S, \quad \| BU''(b, a, x_a) \| \leqslant R^2,$$

где U'' — вторая производная оператора сдвига в точке x_a.

Выберем некоторое число $\beta < 1$ такое, что

$$\frac{\beta}{PR} \cdot \frac{1 + \beta + \beta^3}{1 - \beta^4} = \rho < S. \tag{23}$$

Предположим еще, что по схеме (16) для каждого i выполняется столько итераций r_i, чтобы имели место неравенства

$$\| \varepsilon_{\lambda_i}^{(r_i)} \| \leqslant \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \; P^2 R \varepsilon < \beta. \tag{24}$$

Выберем число разбиений m отрезка [0, 1] таким, чтобы величина $\Delta\lambda$ удовлетворяла соотношению

$$\Delta\lambda = \frac{1}{m} \leqslant \frac{\beta - P^2 R \varepsilon}{PR \| B \| L}. \tag{25}$$

Выполнение условий (22)—(25) обеспечит [6] сходимость итерационного процесса Ньютона для уравнения (11) при дискретном изменении параметра λ с шагом $\Delta\lambda$. Причем это имеет место и в том случае, когда в качестве начального приближения $x_{a,\lambda_i}^{(0)}$ выбрано не точное решение $x_{a,\lambda_{i-1}}$ уравнения (11), полученное при $\lambda = \lambda_{i-1}$, а его r_{i-1}-е приближение $x_{a,\lambda_{i-1}}^{(r_{i-1})}$.

Справедливо утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть для краевой задачи* (1), (2) *в сфере* (21) *выполнены условия* (22)—(24). *Тогда выбор числа разбиений m из соотношения* (25) — *достаточное условие сходимости итерационного процесса* (16) *при* $k \to \infty$, *причем при* $\lambda = \lambda_m$ *эта схема определяет вектор* $x_{a,\lambda_m}^{(r_m)}$, *являющийся приближенным значением единственного в области G начального значения* $x(a) = x_{a,\lambda_m}$, *определяющее решение краевой задачи* (1), (2). *Относительно скорости сходимости* $x_{a,\lambda_m}^{(k)}$ *к* x_{a,λ_m} *верна оценка*

$$\| x_{a,\lambda_m}^{(k)} - x_{a,\lambda_m} \| \leqslant \frac{1}{PR} \frac{\beta^{2^k}}{1 - \beta^{2^k}}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{26}$$

Наряду с (11) в уравнение (5) параметр можно вводить и другими способами, например $Ax_a + BU(b, a, x_a)\, x_a = d - (1 - \lambda)(d - d_\varphi)$, где $d_\varphi = A\varphi + BU(b, a, \varphi)\, \varphi$, $\varphi \in D$ — произвольный вектор, или же, $(1 - \lambda)\, Cx_a + \lambda [Ax_a + BU(b, a, x_a)\, x_a] = (1 - \lambda)\, g + \lambda d$, где матрица C и вектор g произвольные, но такие, что $\det C \neq 0$, $g \not\equiv 0$.

Особый интерес представляет задача нахождения начальных значений периодических решений [7]. Очевидно, что в двухточечную краевую задачу (1), (2) вписывается и периодическая краевая задача с краевыми условиями $x(a) = x(b)$. Следовательно, приведенные схемы пригодны и для отыскания начальных значений, определяющих периодическое решение системы дифференциальных уравнений (1), если принять $A = E$, $B = -E$, $d \equiv 0$.

П р и м е р. Найдем начальное значение решения неоднородного уравнения Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu (1 - x^2)\, \dot{x} + x = g(t) \tag{27}$$

при краевых условиях

$$Ax(0) + Bx(1) = d, \tag{28}$$

где $\mu = 3$, $g(t) = 2e^t (12e^{2t} - 1)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 - 2e \end{bmatrix}.$$

Точным решением задачи (27), (28) является $x(t) = 2e^t$. После приведения уравнения (27) к виду (1) искомое начальное значение находилось по схеме (16) при разных значениях m и N. Нулевое приближение в силу системы (12) определялось значениями $x_{0,\lambda_0} = \xi =$ colon (5.62437577128, 0.18781211436).

По методу Ньютона производилось столько итераций r_i, чтобы для $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ выполнялось условие $\| \varepsilon_{\lambda_i}^{(r_i)} \| < 10^{-2}$, а для $\lambda = \lambda_m = 1 - \| \varepsilon_{\lambda_m}^{(r_m)} \| < 10^{-5}$. При этом r_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ в среднем равно 2, а $r_m = 25$. Так, например, при $m = 25$, $N = 50$ $x_0 = (2.00002798502, 1.9999922156)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйприлл Т. (мл.), Трик Т. Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами. В кн.. Автоматизация в проектировании (перевод с английского). М.: Мир, 1972, с. 148—155.
2. Ронто В. А., Ронто Н. И. О решении линейных краевых задач для систем неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Цифровое моделирование задач математической физики. Киев: Наук. думка, 1975, с. 132—138.
3. Давиденко Д. Ф. О применении итерационного метода вариации параметра к конкретным функциональным уравнениям.— Препринт ИАЭ-2083.— М.: 1971.— 27 с.
4. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.— 332 с.
5. Ронто В. А. О решении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Метод интегральных многообразий в нелинейных дифференциальных уравнениях. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 233-242.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 744 с.
7. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 4, с. 82—93.

СКБ ММС Института кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
18.IV 1978 г.