УДК 517.5

Н. С. Черников

О наилучшем приближении функции, заданной на конечном множестве

Пусть F—поле действительных или комплексных чисел, $M=\{z_1, \ldots, z_m\}$ — непустое конечное множество, f — функция, отображающая множество M в поле F, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — конечная система функций, также отображающих множество M в поле F. Требуется найти «полином» $\sum_{i=0}^{n} d'_i\varphi_i$ от функций φ_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ с коэффициентами d'_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ из поля F, для которого величина $\max_M \left| f - \sum_{i=0}^{n} d_i'\varphi_i \right|$ минимальна, и определить значение $\min_{(d_0,\ldots,d_n)} \max_M \left| f - \sum_{i=0}^{n} d_i\varphi_i \right|$. Такой полином называют полиномом наилучшего приближения функции f, а значение $\min_{(d_0,\ldots,d_n)} \max_M \left| f - \sum_{i=0}^{n} d_i\varphi_i \right|$ — ве личиной наилучшего ее приближения. Как известно, сформулированная задача играет важную роль в теории приближения функций полиномами. Она, очевидно, равносильна задаче о нахождении минимального $\varepsilon \geqslant 0$, при котором система неравенств

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_i - \omega_j \right| \leqslant \varepsilon \qquad (1 \leqslant j \leqslant m), \tag{1}$$

где $a_{ji} = \varphi_i(z_j)$, $x_i = d_i$, $f(z_j) = \omega_j$, совместна, и хотя бы одного решения этой системы при минимальном ε. В настоящей статье последняя задача полностью решается при дополнительном условии: ранг матрицы $A = (a_{ji})$ равен $m-1$. В случае, когда система функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ — чебышевская (см. [1], с. 18), этот вопрос решен в [1, 2]. Если на ранг матрицы A не налагается ограничений, то вопрос о нахождении интересующего нас минимального ε в настоящей работе сведен к вопросу о нахождении абсолютного минимума некоторой вполне определенной выпуклой функции нескольких переменных, строящейся по исходным данным задачи. Минимальное ε, о котором здесь идет речь, называют величиной наилучшего приближения (н. п.) для системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_i = \omega_j, \tag{2}$$

а всякое решение системы (1) с минимальным ε — наилучшим приближенным решением (н. п. решением) системы (2).

Рассмотрим задачу нахождения величины н. п. для системы (2). Введем необходимые обозначения: $A = (\varphi_i(z_j))$, или, с учетом того, что a_{ji} — коэффициенты при неизвестных в системах (1) и (2), $A = (a_{ji})$; r — ранг матрицы A (в дальнейшем принято, что $r \neq 0$ и r первых строк матрицы A линейно независимы); ω — $(m-1)$-мерный вектор-столбец, у которого первые r координат совпадают соответственно с числами $\omega_1 = f(z_1), \dots, \omega_r = f(z_r)$, а остальные (если они есть) равны нулю; $B = (b_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1,\ 0 \leqslant j \leqslant n)$ — фиксированная невырожденная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, для которой произведение AB матриц A и B имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} E & \\ \hline H & 0 \end{array}\right)$, где E — единичная матрица размера $r \times r$ и H — матрица размера $(m-r) \times r$ (будем считать, что при $m = r$ H — «пустая» матрица); ρ — величина н. п. системы (2); $(a_j, x) = \sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_i$ — скалярное произведение векторов $a_j = (a_{j0}, \dots, a_{jn})$ и $x = (x_0, \dots, x_n)$.

Теорема 1. *Пусть $r = m-1$. Тогда имеет место соотношение*

$$\rho = \frac{\left| \omega_m - \sum_{k=0}^{m-2} c_k \omega_{k+1} \right|}{\sum_{k=0}^{m-2} |c_k| + 1},$$

где c_k — k-я координата вектора $a_m B$, причем одно из н. п. решений системы (2) определяется формулой $x' = B(x' + \omega)$, в которой $y' = (y'_0, \dots, y'_n)$ — вектор с координатами

$$y'_k = \begin{cases} \rho \dfrac{\overline{c_k}}{|c_k|} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant m-2,\ c_k \neq 0, \\ \rho e^{i\varphi_k},\ \varphi_k \text{ — произвольное, при } 0 \leqslant k \leqslant m-2,\ c = 0, \\ \text{произвольное число при } k > m-2. \end{cases}$$

Доказательство. Преобразуем системы (1) и (2) с помощью подстановки $x = B(y+\omega)$, где $y = (y_0, \ldots, y_n)$. Тогда $(a_k, x) = (a_k, By + B\omega) = (a_kB, y) + (a_kB, \omega)$ и в силу определения матрицы B $(a_kB, x) = y_{k-1} + \omega_k$ при $1 \leqslant k \leqslant r$. Следовательно, система (1) принимает вид

$$|y_k| \leqslant \varepsilon \qquad (0 \leqslant k \leqslant r-1), \tag{3}$$

$$|(a_{r+1}B, y) + (a_{r+1}B, \omega) - \omega_{r+1}| \leqslant \varepsilon,$$

а система (2) — вид

$$y_k = 0 \qquad (0 \leqslant k \leqslant r-1), \qquad (a_{r+1}B, y) + (a_{r+1}B, \omega) = \omega_{r+1}. \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что величина н. п. системы (4) совпадает с величиной н. п. системы (2). Поэтому значение ρ равно минимальному ε, при котором система (3) совместна. Ввиду результатов работы [3, теорема 6] найдется такое н. п. решение $y' = (y'_0, \ldots, y_n')$ системы (4), что все неравенства системы (3) обращаются в равенства, т. е. имеют место соотношения

$$|y'_k| = \rho \qquad (0 \leqslant k \leqslant r-1), \tag{5}$$

$$|(a_{r+1}B, y') + (a_{r+1}B, \omega) - \omega_{r+1}| = \rho.$$

Обозначим через c_k k-ю координату вектора $a_{r+1}B$ при $0 \leqslant k \leqslant r-1$. Тогда

$$|(a_{r+1}B, y') + (a_{r+1}B, \omega) - \omega_{r+1}| = \left| \sum_{k=0}^{r-1} c_k y'_k + \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1} - \omega_{r+1} \right|. \tag{6}$$

Ввиду соотношений (5) и (6) $y'_k = \rho e^{i\alpha_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant r-1,\ 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2\pi)$,

$$\sum_{k=0}^{r-1} c_k y'_k + \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1} - \omega_{r+1} = \rho e^{i\alpha_r}.$$

Из последних соотношений получаем

$$\rho \left(\sum_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} \right) + \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1} - \omega_{r+1} = \rho e^{i\alpha_r},$$

$$\rho = \frac{\omega_{r+1} - \sum\limits_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}} = \left| \frac{\omega_{r+1} - \sum\limits_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}} \right|.$$

Поэтому в силу самого определения ρ имеем

$$\rho = \min_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_r)} \frac{\left|\omega_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1}\right|}{\left|\sum_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}\right|} = \frac{\left|\omega_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1}\right|}{\max_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_r)} \left|\sum_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}\right|}.$$

Так как $\left|\sum_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} |c_k| + 1$, то $\max_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_r)} \left|\sum_{k=0}^{r-1} c_k e^{i\alpha_k} - e^{i\alpha_r}\right| = \sum_{k=0}^{r-1} |c_k| + 1$. Этот максимум, очевидно, достигается при $e^{i\alpha_k} = \frac{\bar{c}_k}{|c_k|}$, если $c_k \neq 0$, и при произвольном $e^{i\alpha_k}$, если $c_k = 0$. Отсюда следует, что

$$\rho = \frac{\left|\omega_{r+1} - \sum_{k=0}^{r-1} c_k \omega_{k+1}\right|}{\sum_{k=0}^{r-1} |c_k| + 1} = \frac{\left|\omega_m - \sum_{k=0}^{m-2} c_k \omega_{k+1}\right|}{\sum_{k=0}^{m-2} |c_k| + 1}.$$

При этом, очевидно,

$$y'_k = \rho \frac{\bar{c}_k}{|c_k|} = \frac{\left|\omega_m - \sum_{k=0}^{m-2} c_k \omega_{k+1}\right|}{\sum_{k=0}^{m-2} |c_k| + 1} \cdot \frac{\bar{c}_k}{|c_k|} \quad (0 \leqslant k \leqslant m-2),$$

если $c_k \neq 0$, и $y'_k = \rho e^{i\varphi_k}$ (φ_k — произвольное), если $c_k = 0$ $(0 \leqslant k \leqslant m-2)$. Для значений $k > m-2$ y'_k полагаем произвольными. Теорема доказана.

Учитывая, что $a_{ji} = \varphi_i(z_j)$, $\omega_j = f(z_j)$, $x_k = d_k$, доказанную теорему можно сформулировать в таком виде.

Теорема 1*. *Пусть* $r = m-1$. *Тогда величина* ρ^* *н. п. функции* f *полиномами вида* $\sum_{i=0}^{n} d_i \varphi_i$ $(d_i \in F)$ *равна*

$$\left|\frac{f(z_m) - \sum_{k=0}^{m-2} c_k f(z_{k+1})}{\sum_{k=0}^{m-2} |c_k| + 1}\right|,$$

где c_k — *k-я координата вектора* $(\varphi_0(z_m), \ldots, \varphi_n(z_m))B$. *При этом вектор* $d' = (d'_0, \ldots, d'_n)$ *коэффициентов любого полинома наилучшего приближения определяется формулой* $d' = B(y' + \omega)$, *в которой* $y' = (y'_0, \ldots, y'_n)$ — *вектор с координатами*

$$y'_k = \begin{cases} \rho^* \dfrac{\bar{c}_k}{|c_k|} & \textit{при } 0 \leqslant k \leqslant m-2,\ c_k \neq 0, \\ \rho^* e^{i\varphi_k},\ \varphi_k - \textit{произвольное}, & \textit{при } 0 \leqslant k \leqslant m-2,\ c_k = 0, \\ \textit{произвольное число} & \textit{при } k > m-2 \end{cases}$$

и

$$\omega=\begin{pmatrix} f(z_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(z_{m-1}) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Примечание. Теорема 1*, естественно, сохраняет силу и в случае, когда M — подмножество поля F, а $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ — чебышевская система непрерывных функций, заданных на каком-либо подмножестве $L\subset M$ поля F.

Для топологического векторного пространства X над полем F сопряженное пространство (т. е. векторное пространство всех непрерывных линейных функционалов на X) обозначается через X^*, а его элементы — через x^*, y^*, z^*, u^*, ... (см. [4, п. 3.1]). Вместо $x^*(x)$ (где $x^*\in X^*$) будем писать $\langle x,x^*\rangle$.

Норма на пространстве X^* вводится следующим образом (см. (4, п. 4.3]): $\|x^*\|=\sup\{|\langle x,x^*\rangle|:x\in C\}$, где C — единичный шар пространства X.

Пусть X — банахово пространство над полем F, M — подпространство в X, а N — подпространство в X^*. Аннуляторы $M^\perp$ и $N^\perp$ подпространств M и N определяются так (см. [4, п. 4.6]):

$$M^\perp=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=0 \text{ для всех } x\in M\},$$

$$^\perp N=\{x\in X:\langle x,x^*\rangle=0 \text{ для всех } x^*\in N\}.$$

Лемма. *Пусть X — конечномерное банахово пространство над полем F, Y — подпространство пространства X, а x_0 — некоторый элемент X. Тогда справедливо соотношение*

$$\inf\{\|x-x_0\|:x\in Y\}=\sup\{|\langle x_0,x^*\rangle|:x^*\in Y^\perp,\ \|x^*\|=1\}. \tag{7}$$

Лемма очевидна (см., например, [4, с. 129]).

Возвратимся теперь к системам (1) и (2). Запишем их в виде

$$|(a_i,x)-\omega_i|\leqslant\varepsilon \quad (i=1,\ldots,m), \tag{8}$$

$$(a_i,x)=\omega_i \quad (i=1,\ldots,m). \tag{9}$$

где $a_i=(a_{i0},\ldots,a_{in})$, $x=(x_0,\ldots,x_n)$. Очевидно, можно считать, что число $m-(n+1)$ не меньше 2. Действительно, в случае необходимости можно приписать к системе (8) ((9)) достаточное число раз неравенство $|(a_m,x)-\omega_m|\leqslant\varepsilon$ (соответственно, уравнение $(a_m,x)=\omega_m$).

Итак, полагаем $m-(n+1)\geqslant 2$. Подставим в рассматриваемые системы $x=B(y+\omega)$, $y=(y_0,\ldots,y_n)$. Тогда получим следующие системы неравенств и уравнений:

$$\begin{gathered} |y_i|\leqslant\varepsilon \quad (0\leqslant i\leqslant r-1), \\ |(a_iB,y)+(a_iB,\omega)-\omega_i|\leqslant\varepsilon \quad (r+1\leqslant i\leqslant m); \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} y_i=0 \quad (0\leqslant i\leqslant r-1), \\ (a_iB,y)=\omega_i-(a_iB,\omega) \quad (r+1\leqslant i\leqslant m). \end{gathered} \tag{11}$$

Последняя система уравнений несовместна лишь в том случае, когда хотя бы одно из чисел $(a_i, B, \omega) - \omega_i$ $(r+1 \leqslant i \leqslant m)$ отлично от нуля. Условимся считать, что отлично от нуля число $(a_{r+1}B, \omega) - \omega_{r+1}$.

Теорема 2. *Пусть система* (2) *несовместна. Тогда при сделанных выше предположениях имеет место соотношение*

$$\rho = \min_{(z_1,\ldots,z_{m-r-1})} \left\{ \sum_{i=1}^{m-r-1} |z_i| + \frac{\left| 1 - \sum_{i=1}^{m-r-1} ((a_{r+1+i}, B\omega) - \omega_{r+1+i}) z_i \right|}{|(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \frac{c_{r+1,i}}{(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}} + \sum_{j=1}^{m-r-1} z_j \left(c_{j+r+1,i} - \frac{(a_{j+r+1}, B\omega) - \omega_{j+r+1}}{(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}} \right) \right| \right\}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что величины н. п. систем (2) и (11) совпадают. Рассмотрим m-мерное векторное пространство X над полем F, в котором норма определена следующим образом: $\|x\| = \max\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Пусть Y — подпространство пространства X, составленное из всех векторов вида $(y_0, \ldots, y_{r-1}, (a_{r+1}B, y), \ldots, (a_mB, y))$, где $y = (y_0, \ldots, y_n)$ — произвольный $(n+1)$-мерный вектор с координатами из поля F. Обозначим через x_0 m-мерный вектор-столбец

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (a_m, B\omega) - \omega_m \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что минимальное $\varepsilon > 0$ (т. е. величина н. п. системы (2)), при котором система неравенств (10) совместна, равен расстоянию от точки x_0 до подпространства Y и, значит, имеет место равенство

$$\min \varepsilon = \inf\{\|x - x_0\| : x \in Y\}. \tag{12}$$

Согласно лемме справедливо равенство

$$\inf\{\|x - x_0\| : x \in Y\} = \sup\{|\langle x_0, x^*\rangle| : x^* \in Y^\perp, \|x^*\| = 1\}. \tag{13}$$

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — запись элемента $x^* \in Y^\perp$ в базисе, двойственном к базису пространства X. Тогда $\|x^*\| = \sum_{i=1}^{m} |x_i^*|$ (см., например, [5, с. 172]). Далее имеем следующую цепочку равенств для любого $x \in Y$:

$$0 = |\langle x, x^*\rangle| = \sum_{i=0}^{r-1} x_{i+1}^* y_i + \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* (a_jB, y) = \sum_{i=0}^{r-1} x_{i+1}^* y_i +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* \sum_{i=}^{r-1} c_{ji} y_i = \sum_{i=0}^{r-1} y_i \left(x_{i+1}^* + \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{r-1} y_i \left(x_{i+1}^* + \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right) = 0.$$

Ввиду произвольности координат y_i отсюда следует, что

$$x_{i+1}^* = - \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji}. \tag{14}$$

Из соотношений (12)—(14) имеем

$$\min \varepsilon = \sup \left\{ \left| \sum_{i=r+1}^{m} x_i^* ((a_i, B\omega) - \omega_i) \right| : \sum_{i=r+1}^{m} |x_i^*| + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right| = 1 \right\}.$$

Пусть

$$g_1 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*) = \left| \sum_{i=r+1}^{m} x_i^* ((a_i, B\omega) - \omega_i) \right|, \quad g_2 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*) =$$

$$= \sum_{i=r+1}^{m} |x_i^*| + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right|.$$

Очевидно, что при любых $x_{r+1}^*, \ldots, x_m^* \in F$ и $\lambda \in F g_1 (\lambda x_{r+1}^*, \ldots, \lambda x_m^*) = |\lambda| g_1 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*)$, $g_2 (\lambda x_{r+1}^*, \ldots, \lambda x_m^*) = |\lambda| g_2 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*)$. Отсюда следует, что всякое значение, принимаемое функцией $\dfrac{g_1 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*)}{g_2 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*)}$ на всем множестве $(m-r)$-мерных векторов, отличных от нулевого вектора принимается ею и на подмножестве, определяемом равенством $g_2 (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*) = 1$. (Нетрудно убедиться, что знаменатель здесь обращается в нуль только для $x_{r+1}^* = \ldots = x_m^* = 0$). Поэтому выполняется соотношение

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=r+1}^{m} x_i^* ((a_i, B\omega) - \omega_i) : \sum_{i=r+1}^{m} |x_i^*| + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right| = 1 \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \frac{\left| \sum_{i=r+1}^{m} x_i^* ((a_i, B\omega) - \omega_i) \right|}{\sum_{i=r+1}^{m} |x_i^*| + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right|} : (x_{r+1}^*, \ldots, x_m^*) = (0, \ldots, 0) \right\}.$$

Обозначим величину $\sum_{i=r+1}^{m} |x_i^*| + \sum_{i=0}^{r-1} \left| \sum_{j=r+1}^{m} x_j^* c_{ji} \right|$ через $\tilde{x}_{r+1}^*$ и через $\tilde{x}_{r+1}^*$ выразим x_{r+1}^*:

$$x_{r+1}^* = ((a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1})^{-1} \left(\tilde{x}_{r+1}^* - \sum_{i=r+2}^{m} x_i^* ((a_i, B\omega) - \omega_i) \right).$$

Сделаем замену $z_{i-r-1} = \dfrac{x_i^*}{\tilde{x}_{r+1}^*}$ $(r+1 \leqslant i \leqslant m)$. Тогда после соответствующих преобразований получим

$$\rho = \min \varepsilon = \sum_{i=1}^{m-r-1} |z_i| + \frac{\left|1 - \sum\limits_{i=1}^{m-r-1} ((a_{i+r+1}, B\omega) - \omega_{i+r+1}) z_i\right|}{|(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}|} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{r-1} \left| \frac{c_{r+1,i}}{(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}} + \sum_{j=1}^{m-r-1} z_j \left(c_{j+r+1,i} - \frac{(a_{j+r+1}, B\omega) - \omega_{j+r+1}}{(a_{r+1}, B\omega) - \omega_{r+1}} \right) \right|.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 512 с.
2. Дзядык В. К. О приближении функций на множествах, состоящих из конечного числа точек.— В кн. Теория приближения функций и ее приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 69—80.
3. Иванов В. К. Задача о минимаксе системы линейных функций.— Мат. сб., 1951, 28, №3, с. 685—706.
4. Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.— 443 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1972.— 496 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
3.V 1978 г