УДК 517.949.2

Я. И. Бигун, В. И. Фодчук

Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием

Как известно, в процессе эволюции в многочастотных динамических системах могут возникать в некоторые моменты или промежутки времени резонансные явления. При этом может не выполняться условие существования «равномерного среднего», что и обуславливает трудность изучения таких систем. Для исследования двухчастотных систем соответствующих дифференциальных уравнений в работах [1, 2] применялся метод усреднения. Установленные в этих работах теоремы дают условия, обеспечивающие на интервале времени порядка ε^{-1}, $\varepsilon>0$ — малый параметр, близость (порядка $\sqrt{\varepsilon}$) решений точных и усредненных уравнений. Для систем с числом частот $n>2$ аналогичные утверждения доказаны в [3]. В работе [4] дано обоснование метода усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений на интервале времени $\varepsilon^{-1/2}$ и ε^{-1} в случае, когда начальные условия заданы на резонансных гиперповерхностях. Представляет интерес исследовать применимость метода усреднения к многочастотным динамическим системам с последействием. Этот вопрос для одного частного случая систем с запаздыванием рассмотрен в данной статье.

Будем изучать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(x, x_\Delta, y, y_\Delta), \qquad \frac{dy}{dt}=\omega(x)+\varepsilon Y(x, x_\Delta, y, y_\Delta), \tag{1}$$

где $x=\mathrm{col}(x_1, \ldots, x_m)$, $y=\mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n)$, $n\geqslant 2$; $\Delta>0$ — постоянное запаздывание, $x_\Delta(t)=x(t-\Delta)$, $y_\Delta(t)=y(t-\Delta)$, $X(x, x_\Delta, y, y_\Delta)=X^{(1)}(x, x_\Delta, y)+X^{(2)}(x, x_\Delta, y_\Delta)$. Относительно правых частей уравнений (1) предположим, что они удовлетворяют следующим условиям.

1. Вектор-функции X, Y определены, непрерывно дифференцируемы по x, x_Δ и 2π-периодические по y, y_Δ в области $S=\{x, x_\Delta\in D, |\mathrm{Im}\, y|\leqslant\sigma\leqslant 1, |\mathrm{Im}\, y_\Delta|\leqslant\sigma\leqslant 1\}$, где D — компактная область в R^m, а под символом $|\cdot|$ будем понимать здесь и в дальнейшем норму вектора $|a|=|a_1|+\ldots+|a_m|$ или норму матрицы $|A|=\max\limits_s\sum\limits_r|a_{rs}|$.

2. В области S функции X, Y, $\dfrac{\partial X}{\partial x}$, $\dfrac{\partial X}{\partial x_\Delta}$ аналитичны по y, y_Δ и имеют место оценки $|X|<M_1$, $\left|\dfrac{\partial X}{\partial x}\right|<M_2$, $\left|\dfrac{\partial X}{\partial x_\Delta}\right|<M_2$, $|Y|<M_3$.

3. При $x\in D$ вектор-функция частот $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема, $|\omega(x)|<M_4$, $\left|\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right|<M_5$.

4. Правые части системы (1) при вещественных значениях аргументов вещественны. В дальнейшем будут изучаться только вещественные решения.

5. Решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1) удовлетворяет начальному условию $x(t)=\varphi(t, \varepsilon)=x(0)+\varepsilon\varphi_1(t, \varepsilon)$, $y(t)=\psi(t, \varepsilon)$ при $-\Delta\leqslant t\leqslant 0$.

Вектор-функции $\varphi_1(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ непрерывны по t, ε на множестве $[-\Delta, 0]\times[0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$.

Усредненной для системы (1) назовем систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\varepsilon X_0(\bar{x}, \bar{x}), \tag{2}$$

где
$$X_0(\bar{x}, \bar{x})=(2\pi)^{-n}\left[\int^{2\pi} X^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}, y)\,dy+\int_0^{2\pi} X^{(2)}(\bar{x}, \bar{x}, y_\Delta)\,dy_\Delta\right]$$

и интегрирование ведется по каждой компоненте векторов y и y_Δ.

Предположим, что решение $\bar{x}=\bar{x}(t)$ системы (2) с начальным условием $\bar{x}(0)=x(0)$ определено при $t>0$ и остается в области D с некоторой своей η-окрестностью в течении времени $L\varepsilon^{-1}$, $L>0$ — произвольная фиксированная постоянная.

Перепишем систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(x, x, y, y_\Delta)+\varepsilon\tilde{X},\ \ \frac{dy}{dt}=\omega(x)+\varepsilon Y(x, x_\Delta, y, y_\Delta), \tag{3}$$

где $\tilde{X}=X(x, x_\Delta, y, y_\Delta)-X(x, x, y, y_\Delta)$.

Из (1) и условий 1, 2 и 5 находим

$$|x(t)-x(t-\Delta)|\leqslant\varepsilon\int_{t-\Delta}^{t}|X|<\varepsilon\Delta M_1,\ \ t\geqslant\Delta;$$

$$|x(t)-x(t-\Delta)|<\varepsilon(\Delta M_1+M_0),\ \ 0\leqslant t\leqslant\Delta,\ \ M_0=\max_{t,\varepsilon}|\varphi_1|.$$

Поэтому $|\tilde{X}|<M_2|x-x_\Delta|<\varepsilon M_2(\Delta M_1+M_0)=c_1\varepsilon$.

Введем обозначения: ∂D — граница области D, k — целочисленный вектор, $A(x, y, y_\Delta)=\left(k, \dfrac{\partial\omega(x)}{\partial x}\cdot X(x, x, y, y_\Delta)\right)$, $D_{KN}=\{x\in D:|(k, \omega(x))|\leqslant\leqslant K|k|^{-n},\ 0<K<1,\ 1\leqslant|k|\leqslant N\}$, $(k, \omega)=k_1\omega_1+\ldots+k_n\omega_n$. Величина K и целое число N зависят от ε и будут определены ниже.

Очевидно, существует $\tau>\Delta$ такое, что при $0\leqslant t\leqslant\tau$ компоненты $x(t)$ решение системы (1) лежит в области D и при этом либо $\tau=L\varepsilon^{-1}$, либо $\tau<L\varepsilon^{-1}$ и расстояние $\rho(x(\tau), \delta D)=0{,}5\,\eta$. Обозначим $d_{KN}==\{t\in[0, \tau],\ x(t)\in D_{KN},\ 1\leqslant|k|\leqslant N\}$, $p_{KN}=[0, \tau]\setminus d_{KN}$, где чертой обозначено замыкание.

Как известно [1—3, 5], метод усреднения явно не применим, если траектория решения $x(t)$ находится вблизи резонансных поверхностей $(k, \omega(x))=0$. Чтобы исключить возможность пребывания системы в окрестности резонансов как угодно долго, будем требовать выполнения условий

$$|A(x, y, y_\Delta)|>c_2^{-1}|k|^{-n},\ \ 1\leqslant|k|\leqslant N, \tag{4}$$

если $x\in D$, y, $y_\Delta\in T^n$, где $T^n=\{y:0\leqslant y_r\leqslant 2\pi,\ r=1, \ldots, n\}$.

Для построения оценки нормы разности $x(t)-\bar{x}(t)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant L\varepsilon^{-1}$ докажем сначала вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (4) *и* ε, K, N *удовлетворяют неравенствам*

$$2c_1c_2M_5\varepsilon N^{n+1}<1,\ \ 4c_2K<L. \tag{5}$$

Тогда множество d_{KN} *будет состоять не более чем из* c_3N *отрезков и длина каждого из них не превысит* $c_4\varepsilon^{-1}K$, *где* c_3, c_4 — *постоянные, не зависящие от* ε, K, N.

Доказательство. Пусть k — целочисленный вектор, $1\leqslant\leqslant|k|\leqslant N$. Учитывая (3), запишем уравнение для $(k, \omega(x))$

$$\frac{d}{dt}(k, \omega(x))=\varepsilon A(x, y, y_\Delta)+\varepsilon\left(k, \frac{\partial\omega}{\partial x}\tilde{X}\right).$$

Используя оценку нормы $\tilde{X}$, условие 3 и первое из неравенств (5), находим

$$|(k, \omega(x_2)) - (k, \omega(x_1))| > \varepsilon |k|^{-n} (c_2^{-1} - \varepsilon c_1 M_5 |k|^{n+1}) |t_2 - t_1|.$$

Если положить $|t_2 - t_1| = L\varepsilon^{-1}$, то при условии $4c_2K < L$ получим

$$|(k, \omega(x_2)) - (k, \omega(x_1))| > 0{,}5 c_1^{-1} L |k|^{-n} > 2K |k|^{-n}.$$

Значит, для каждого целочисленного вектора k, $1 \leqslant |k| \leqslant N$, система пребывает в резонансной зоне, ширина которой равна $2K|k|^{-n}$, только на некотором отрезке $[t_1, t_2] \subset [0, L\varepsilon^{-1}]$. Как известно (см. [5, с. 166]), число векторов с целочисленными координатами, для которых $1 \leqslant |k| \leqslant N$, не превышает $c_3 N^n$, где $c_3 = c_3(n)$, и не зависит от N. Следовательно, множество d_{KN} — объединение l отрезков из $[0, L\varepsilon^{-1}]$, $l \leqslant c_3 N^n$.

Для оценки длины отрезка из d_{KN} предположим, что $(k, \omega(x(t_1))) = 0$, $(k, \omega(x(t_2))) = K|k|^{-n}$. Тогда $K|k|^{-n} = (k, \omega(x(t_2))) - (k, \omega(x(t_1))) > 0{,}5 c_2^{-1} |k|^{-n} |t_2 - t_1|$, откуда $|t_2 - t_1| < 2c_2 \varepsilon^{-1} K$.

Если $0 < |(k, \omega(x(t_1)))| \leqslant K|k|^{-n}$, то окончательно

$$|t_2 - t_1| < uc_2 \varepsilon^{-1} K = c_4 \varepsilon^{-1} K. \qquad (6)$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $[\alpha, \beta]$ — один из отрезков, принадлежащих множеству p_{KN}. Если $\alpha + \gamma \leqslant t \leqslant \beta - \gamma$, где $0 < 2\gamma < \beta - \alpha$, то*

$$|(k, \omega(x(t)))| > (K + 0{,}5 c_2^{-1} \varepsilon\gamma) |k|^{-n}.$$

Доказательство леммы,— в сущности, повторение доказательства леммы 2 из [3, с. 39]. При этом используются вид (3) системы (1) и условия (4).

Теорема. *Пусть выполняются условия 1—5, имеют место неравенства (4) и $\bar{x}(0) = x(0)$. Пусть также $N = c_{14} \ln 1/\varepsilon$, $K = c_{17}\sqrt{\varepsilon}$, c_{14}, c_{17} — постоянные, не зависящие от ε. Тогда для произвольных $L > 0$, $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при $0 < \varepsilon < \varepsilon 0$ на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедлива оценка*

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < c_{18} \sqrt{\varepsilon} \ln^n \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (7)$$

где c_{18} — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Построим множество $d_{KN}^{\Delta} = [\Delta, \tau] \cap d_{KN}$, которое назовем резонансным, и нерезонансное множество $p_{KN}^{\Delta} = [\Delta, \tau] \cap p_{KN}$. Заметим, что число отрезков, составляющих множество p_{KN}^{Δ}, не превышает $c_3 N^n + 1$. Обозначим последовательно эти отрезки через $[\alpha_r, \beta_r]$ $(r = 1, \ldots, l)$. Для определенности предположим, что отрезок $[\Delta, \alpha_1]$ резонансный и $\tau = \beta_l$.

Будем оценивать норму разности решений системы точных и усредненных уравнений отдельно на отрезке $[0, \Delta]$ и на каждом из отрезков, составляющих резонансное и нерезонансное множества.

На $[0, \Delta]$, как следует из (1)—(2), имеем

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < 2\Delta M_1 \varepsilon = c_5 \varepsilon. \qquad (8)$$

На каждом резонансном отрезке $[\beta_r, \alpha_{r+1}]$ из (1), (2) и неравенства (6) выводим

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < |x(\beta_r) - \bar{x}(\beta_r)| + c_6 K, \qquad (9)$$

где $C_6 = 2c_4 M_1$. В частности, $|x(t) - \bar{x}(t)| < c_5 \varepsilon + c_6 K$, если $\Delta \leqslant t \leqslant \alpha_1$.

На нерезонансном множестве p_{KN}^{Δ} выполняется неравенство $|(k, \omega(x(t)))| \geqslant K|k|^{-n}$. Определим при $t \in p_{KN}^{\Delta}$ вектор-функцию $U = U(x(t), y(t), y_{\Delta}(t)) =$

$= U^{(1)}(x(t), y(t)) + U^{(2)}(x(t), y_\Delta(t))$, где слагаемые $U^{(1)}(x, y)$, $U^{(2)}(x, y_\Delta)$ — тригонометрические многочлены по y, y_Δ:

$$U^{(1)} = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant N} U_k^{(1)}(x)\, e^{i(k,y)},\ U^{(2)} = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant N} U_k^{(2)}(x)\, e^{i(k,y_\Delta)}. \tag{10}$$

Представим ряд Фурье функции $X(x, x, y, y_\Delta)$ в виде $X = X_0 + X_N + R_N$, где X_0 — нулевой член разложения, X_N — сумма членов ряда, для которых $1\leqslant|k|\leqslant N$, R_N — остаток ряда.

Вектор-функции $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ определяем из условия

$$X_N(x, x, y, y_\Delta) + \frac{\partial U^{(1)}(x, y)}{\partial y}\,\omega(x) + \frac{\partial U^{(2)}(x, y_\Delta)}{\partial y_\Delta}\,\omega(x) \equiv 0. \tag{11}$$

Из тождества (11) находим коэффициенты многочленов $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$:

$$U_k^{(1)}(x) = \frac{X_k^{(1)}(x, x)}{i(k, \omega(x))},\quad U_k^{(2)}(x) = \frac{X_k^{(2)}(x, x)}{i(k, \omega(x))}.$$

Для коэффициентов Фурье вектор-функций $X^{(r)}$ $(r = 1, 2)$ и матриц-функций $\dfrac{\partial X^{(r)}(x, x)}{\partial x}$ $(r=1,2)$ в области S имеют место оценки (см. [5, с. 168])

$$|X_k^{(r)}| < M_1 e^{-|k|\sigma},\ \left|\frac{\partial X_k^{(r)}}{\partial x}\right| < 2mM_2 e^{-|k|\sigma}\quad (r = 1, 2)\cdot \tag{12}$$

Тогда в области $x \in \overline{D\setminus D_{KN}}$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant 0{,}5\sigma$, $|\operatorname{Im} y_\Delta| \leqslant 0{,}5\sigma$ из (10), (12) следует

$$|U(x, y, y_\Delta) < 2M_1K^{-1}\sum_{|k|>0}|k|^n e^{-0,5|k|\sigma} = c_7K^{-1}, \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant \sum_{1\leqslant|k|\leqslant N}\left[\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_k^{(1)}(x, x)}{(k, \omega(x))}\right)\right| e^{-(k,\operatorname{Im} y)} + \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_k^{(2)}(x, x)}{(k, \omega(x))}\right)\right| e^{-(k,\operatorname{Im} y_\Delta}\right] <$$

$$< 2K^{-1}\sum_{|k|>0}|k|^{n+1}(M_2M_4m^2 + M_1M_5|k|^nK^{-1})\, e^{-0,5|k|\sigma} < c_8K^{-1} + c_9K^{-2}.$$

Так как $K<1$, то окончательно имеем

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < c_{10}K^{-2}, \tag{14}$$

где постоянная c_{10} не зависит от N.

Применяя неравенство Коши (см. [3, с. 213]) к вектор-функции $U(x, y, y_\Delta)$ при $|\operatorname{Im} y| \leqslant 0{,}5\,\sigma$, $|\operatorname{Im} y_\Delta| \leqslant 0{,}5\,\sigma$, получим

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| \leqslant \frac{|U|}{0{,}5\,\sigma}\,m < 2c_7\sigma^{-1}mK^{-1} = c_{11}K^{-1},\quad \left|\frac{\partial U}{\partial y_\Delta}\right| < c_{11}K^{-1}. \tag{15}$$

Следуя идее асимптотических методов [6], на множестве $p^\Delta{}_{KN}$ рассмотрим выражение

$$u(t) = x(t) + \varepsilon U(x(t),\ y(t),\ y_\Delta(t)), \tag{16}$$

где вектор-функция $U(x, y, y_\Delta)$ определена из (11).

Если параметр ε удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < 0{,}5\,c_7^{-1}\,\eta K, \tag{17}$$

то в силу (14) при $t \in p_{KN}^{\Delta}$

$$|x(t) - u(t)| < c_7 \varepsilon K^{-1}, \tag{18}$$

где $x(t)$ — решение системы (1).

Следовательно, на каждом отрезке $[\alpha_r, \beta_r]$ $(r=1, \ldots, l)$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < c_7 \varepsilon K^{-1} + |u(t) - \bar{x}(t)|. \tag{19}$$

Для оценки $|u(t) - \bar{x}(t)|$, используя условия 1, 2, запишем неравенство

$$\left| \frac{d(u - \bar{x})}{dt} \right| \leqslant 2\varepsilon M_2 |u - \bar{x}| + c(t), \tag{20}$$

где $c(t) = \left| \dfrac{du}{dt} - \varepsilon X_0(u, u) \right|$.

Дифференцируя (16) с учетом (3) и (10), при $\alpha_r \leqslant t \leqslant \beta_r$ получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} + \varepsilon \frac{dU}{dt} = \varepsilon X_0(u, u) + \varepsilon [X_0(x, x) - X_0(u, u)] + \varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial x} X +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial y} Y + \varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial y_\Delta} Y_\Delta + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y_\Delta} (\omega_\Delta - \omega) + \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon R_N = \varepsilon X_0(u, u) + \sum_{r=1}^{7} I_r, \tag{21}$$

где $Y_\Delta = Y(x_\Delta, x_{2\Delta}, y_\Delta, y_{2\Delta})$, $\omega_\Delta = \omega(x_\Delta)$, I_r $(r = 1, \ldots, 7)$ — соответствующие слагаемые в правой части равенства (21), начиная со второго.

Из условий 1, 2 и (18) находим $|I_1| < 2\varepsilon M_2 |u - x| < 2c_7 M_2 \varepsilon^2 K^{-1}$. Для величин I_r $(r = 2, 3, 4, 5)$, учитывая (14), (15), имеем

$$|I_2| \leqslant \varepsilon^2 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \cdot |X| < c_{10} M_1 \varepsilon^2 K^{-2}, \quad |I_3 + I_4| \leqslant \varepsilon^2 \left(\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \cdot |Y| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial U}{\partial y_\Delta} \right| \cdot |Y_\Delta| \right) < 2c_{11} M_3 \varepsilon^2 K^{-1}, \quad |I_5| \leqslant \varepsilon \left| \frac{\partial U}{\partial y_\Delta} \right| \cdot \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right| \cdot |x - x_\Delta| <$$

$$< c_{12} \varepsilon^2 K^{-1}, \ c_{12} = c_{11} \Delta M_1 M_5.$$

Так как $|\tilde{X}| < c_1 \varepsilon$, то $|I_6| < c_1 \varepsilon^2$.

Используя оценку остаточного члена ряда Фурье (см. [5, с. 168]) получим $|I_7| < c_{13} \varepsilon^2$, $c_{13} = 8 \left(\dfrac{16n}{e\sigma} \right)^n \dfrac{M_1}{\sigma}$, если $N = 4\sigma^{-1} \ln \dfrac{1}{\varepsilon} = c_{14} \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|\operatorname{Im} y| \leqslant 0{,}5\sigma$, $|\operatorname{Im} y_\Delta| \leqslant 0{,}5\sigma$.

Из оценок для I_r $(r = 1, \ldots, 7)$ и (21) окончательно находим $c(t) < \varepsilon^2 (c_1 + c_{13}) + \varepsilon^2 K^{-1} (2c_7 M_2 + 2c_{11} M_3 + c_{12}) + \varepsilon^2 K^{-2} c_{10} M_1 < c_{15} \varepsilon^2 (c_{16} + K^{-2})$.

Решая неравенство (20) (см. [1, лемма 4]), имеем

$$|u(t) - \bar{x}(t)| < \left[|u(\alpha_r) - \bar{x}(\alpha_r)| + \int_{\alpha_r}^{t} c(t)\, dt \right] e^{2\varepsilon M_2 (\beta_r - \alpha_r)}, \tag{22}$$

если $\alpha_r \leqslant t \leqslant \beta_r$.

При $\alpha_r + \gamma \leqslant t \leqslant \beta_r - \gamma$, $0 < 2\gamma < \beta_r - \alpha_r$ из леммы 2 следует $c(t) < c_{15} [c_{16} + (K + 0{,}5 c_2^{-1} \varepsilon\gamma)^{-2}]$. Поскольку $\beta_r - \alpha_r \leqslant L\varepsilon^{-1}$, то

$$\int_{\alpha_r}^{\beta_r} c(t)\, dt \leqslant c_{15} c_{16} L\varepsilon + 2c_{15} \varepsilon^2 \int_{0}^{2^{-1}(\beta_r - \alpha_r)} (K + 0{,}5 c_2^{-1} \varepsilon\gamma)^{-2}\, d\gamma < c_{15} \varepsilon (c_{16} L + 4c_2 K^{-1}).$$

Из полученного неравенства, (19) и (22) находим

$$|x(t)-\bar{x}(t)|<c_7\varepsilon K^{-1}+[|x(\alpha_r)-\bar{x}(\alpha_r)|+(c_7+4c_2c_{15})\varepsilon K^{-1}+$$
$$+c_{15}c_{16}L\varepsilon]\,e^{2\varepsilon M_2(\beta_r-\alpha_r)},\ \alpha_r\leqslant t\leqslant\beta_r. \tag{23}$$

Используя на отрезке $[0, \Delta]$ оценку (8), а при $t\geqslant\Delta$ последовательно применяя (9) и (23), получаем при $0\leqslant t\leqslant\tau$

$$|x(t)-\bar{x}(t)|<le^{2\varepsilon M_2\Sigma(\beta_r-\alpha_r)}\,[(c_5+c_{15}c_{16}L)\,\varepsilon+c_6K+(2c_7+4c_2c_{15})\,\varepsilon K^{-1}].$$

Выберем $\varepsilon_0<e^{-2n}$ так, чтобы оно удовлетворяло первому из неравенств (5), (17) и чтобы при всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$c_{18}\sqrt{\varepsilon}\ln^n\frac{1}{\varepsilon}<0{,}25\,\eta. \tag{24}$$

Положим $K=c_{17}\sqrt{\varepsilon}$. Если $c_{17}=4^{-1}c_2^{-1}e^nL$, то выполняется второе из неравенств (5). Тогда, учитывая, что $l\leqslant c_3N^n$, $N=c_{14}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, $\Sigma(\beta_r-\alpha_r)\leqslant\leqslant L\varepsilon^{-1}$, получим искомую оценку $|x(t)-\bar{x}(t)|<c_{18}\sqrt{\varepsilon}\ln^n\frac{1}{\varepsilon}$, $0\leqslant t\leqslant\tau$, где $c_{18}=c_3c_{14}^n\,[(c_5+c_{15}c_{16})\sqrt{\varepsilon_0}+2c_{17}^{-1}(c_7+2c_2c_{15})+c_6c_{17}]\,e^{2M_2L}$.

Наконец, покажем, что можно взять $\tau=L\varepsilon^{-1}$. Действительно, если это не так, то существует такое $\tau<L\varepsilon^{-1}$, что в силу (24) $\rho(x(\tau),\delta D)\geqslant\rho(\tilde{x}(\tau),\delta D)-|x(\tau)-\tilde{x}(\tau)|>\eta-0{,}25\,\eta=0{,}75\,\eta>0{,}5\,\eta$, а это противоречит выбору τ в начале работы.

Замечание. Результат, полученный выше, можно обобщить на случай, когда вектор-функции X, Y в (1) зависят от ε, система (1) содержит несколько переменных запаздываний $\Delta_r(t,\varepsilon)$ $(r=1,\dots,k)$, вектор частот $\omega=\omega(x, x_{\Delta_1},\dots,x_{\Delta_k})$. Так, если запаздывания ограничены некоторыми постоянными, не зависящими от ε, а вектор-функции X, Y непрерывно дифференцируемы по ε при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $\varepsilon_0>0$, то выводы доказанной выше теоремы остаются справедливыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс.— ДАН СССР, 1965, 161, № 1, с. 9—12.
2. Нейштадт А. И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче.— ДАН СССР, 1975, 221, № 2, с. 301—304.
3. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике.— М. : Наука, 1971.— 442 с.
4. Гребенников Е. А. Некоторые оценки метода осреднения для многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ДУ, 1968, 4, № 3, с. 459—473.
5. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи мат. наук, 1963, 18, № 6, с. 91—192.
6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев. Наук. думка, 1971.— 440 с.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
27.III 1979 г.