УДК 519.46

Л. Н. Козерацкая, В. В. Остапенко

Топологические нильгруппы матриц

Понятия топологического нильэлемента и топологической нильгруппы введены в рассмотрение в работе [1].

Настоящая статья посвящена изучению линейных топологических нильгрупп. Всюду в статье под линейной топологической группой будем понимать подгруппу (не обязательно замкнутую) группы $GL(n, C)$, где C — поле комплексных чисел, топология в $GL(n, C)$ понимается в естественном смысле.

В статье для отдельных важных классов линейных групп (топологические нильподгруппы $GL(2, C)$, линейные разрешимые топологические нильгруппы, линейные треугольные топологические нильгруппы) положительно решается поставленный В. С. Чариным вопрос о локальной нильпотентности групп, входящих в указанные классы. Полученные результаты с большой долей уверенности позволяют предполагать, что вопрос о локальной нильпотентности произвольной линейной топологической нильгруппы решится положительно.

Будем пользоваться рекуррентными формулами для коммутаторов, вычисляемыми непосредственно. Пусть

$$a=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}. \text{ Обозначим } [b, a(n)]=\begin{bmatrix}x_n & y_n\\ z_n & t_n\end{bmatrix}.$$

Если $\det b=1$, то

$$\begin{aligned} x_n &= 1-\lambda^{-1}x_{n-1}z_{n-1},\\ y_n &= \lambda^{-1}+\lambda^{-2}z_{n-1}x_{n-1}+\lambda^{-1}x_{n-1}^2,\\ z_n &= -\lambda^{-1}z_{n-1}^2,\\ t_n &= \lambda^{-1}z_{n-1}^2+1+\lambda^{-1}z_{n-1}x_{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если $\det b=\Delta\neq 1$, то $\det[b, a]=1$ и для $n\geqslant 2$ формулы (1) сохраняются. Для $n=1$ полагаем $x_0z_0=\Delta^{-1}xz$, $x_0^2=\Delta^{-1}x^2$, $z_0^2=\Delta^{-1}z^2$.

Пусть теперь $a=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1}t_{n-1}-y_{n-1}z_{n-1}\lambda_2\lambda_1^{-1},\\ y_n &= x_{n-1}y_{n-1}(1-\lambda_1\lambda_2^{-1}),\\ z_n &= z_{n-1}t_{n-1}(1-\lambda_2\lambda_1^{-1}),\\ t_n &= t_{n-1}x_{n-1}-y_{n-1}z_{n-1}\lambda_1\lambda_2^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (2) вычислены для $\det b=1$; если $\det b=\Delta\neq 1$, то x_1, y_1, z_1, t_1 надо разделить на Δ; для $n\geqslant 2$ — без изменений.

Будем пользоваться еще такими формулами:

$$\left[\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & d_1\\ d_2 & 0\end{bmatrix}^n\right] = \begin{bmatrix}\lambda_1\lambda_2^{-1} & 0\\ 0 & \lambda_2\lambda_1^{-1}\end{bmatrix}^{2^{n-1}},$$

$$\left[\begin{bmatrix}0 & d_1\\ d_2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}(2)\right] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Топологическая нильгруппа $G \leqslant GL(2, C)$ локально нильпотентна.*

Доказательство. 1. Предположим, что в G существует элемент, сопряженный с $a = \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$. Не теряя общности, можно считать, что $a \in G$. Пусть g — произвольный элемент группы G $g = \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$. Так как G — топологическая нильгруппа, то $[g, a(n)] \underset{n\to\infty}{\to} e$, $[g, a^k(n)] \underset{n\to\infty}{\to} e$ для любого целого k. $[g, a(n)] = \begin{bmatrix}x_n & y_n\\ z_n & t_n\end{bmatrix}$. Из формул (1) следует, что $z_n = -\dfrac{z_{n-1}^2}{\lambda}$, при $|z| \geqslant |\lambda||\Delta|$ сходимость невозможна, так как тогда $|z_n| > |\lambda|$ для любого n.

Если $0 < |z| < |\lambda||\Delta|$, то существует такое натуральное число k_0, что $|z| k_0 > |\lambda||\Delta|$.

Рассмотрим $[g, a^{k_0}(n)]$. Аналогично формулам (1) в этом случае получим $z_{n+1} = \dfrac{z_n^2 k_0}{\lambda}$. Тогда $|z_n| k_0 > |\lambda||\Delta|$ для любого n и сходимость $[g, a^{k_0}(n)]$ к единичной матрице невозможна.

Если $a = \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, то произвольный элемент группы G имеет вид $\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & t\end{bmatrix}$.

Непосредственно вычисляем

$$[a, g(n)] = \begin{bmatrix}1 & \lambda^{-1}(xt^{-1} - 1)^n\\ 0 & 1\end{bmatrix} \to e;$$

это возможно при $|xt^{-1} - 1| < 1$. Но можно подобрать такую степень k_1 матрицы g (при $xt^{-1} \neq 1$), что $|(xt^{-1})^{k_1} - 1| > 1$ и тогда $[a, g^{k_1}(n)] \not\to e$. Отсюда следует, что $x = t$, т. е. G — абелева группа.

2. Пусть в G нет элементов, сопряженных с $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$. Не теряя общности, считаем, что $a = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \in G$ и $\lambda_1\lambda_2^{-1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Поэтому $|1 - (\lambda_1\lambda_2^{-1})^k|^2 = 1 + r^k(r^k - 2\cos k\varphi)$. Если $\lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$, то существует такое целое, не обязательно положительное k, что $|1 - (\lambda_1\lambda_2^{-1})^k| > 1$. Поэтому считаем, что $|1 - \lambda_1\lambda_2^{-1}| > 1$.

Непосредственное применение формул (2) показывает, что в этом случае для произвольного $g \in G$ существует только три возможности:

а) $g = \begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}$; б) $g = \begin{bmatrix}0 & y\\ z & 0\end{bmatrix}$; в) $g = \begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ $(xyzt \neq 0)$.

2′. Пусть $a = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \in G$ такая, что $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq e^{i2^{-(n-2)}k\pi}$. Тогда вариант б) невозможен в силу формул (3). Рассмотрим $\left[\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}(n)\right]$. Из (2) следует, что

$$y_n = (1 - \lambda_1\lambda_2^{-1})^n x_{n-1} \cdot \ldots \cdot xy\Delta^{-1} = [(1 - \lambda_1\lambda_2^{-1})x_{n-1}] \ldots [(1 - \lambda_1\lambda_2^{-1})x]\, y\Delta^{-1}. \tag{4}$$

Так как G — топологическая нильгруппа, то $x_n \to 1$. Следовательно, существует такое $\bar{n}$, что при $k > \bar{n}$ $|(1-\lambda_1\lambda_2^{-1})x_k| > 1$; так как $y_n \to 0$, то существует такое $k_0 < n$, что $y_{k_0} = 0$. Отсюда $x_{k_0-1} = 0$, чего не может быть, т. е. G — абелева группа.

2″. Рассмотрим отдельно случай, когда $\lambda_1\lambda_2^{-1} = e^{i\frac{k\pi}{2^{n-2}}} \neq \pm 1$. Вариант в) невозможен, так как в противном случае из (4) следует x_{k_0} и t_{k_0}. Из (2) имеем

$$0 = x_{k_0} = 1 + y_{k_0-1}z_{k_0-1}(1 - \lambda_1\lambda_2^{-1}),$$

$$0 = t_{k_0} = 1 + y_{k_0-1}z_{k_0-1}(1 - \lambda_2\lambda_1^{-1}),$$

откуда $\lambda_1^2\lambda_2^{-2} = 1$.

2‴. Остался случай, когда любая $g \in G$ имеет собственные значения такие, что $\lambda_1\lambda_2^{-1} = -1$, либо g — скалярная матрица. Поскольку $\det[g, a] = 1$, то либо $[g, a] = e$ либо $\operatorname{tr}[g, a] = 0$. Из формул (2) следует, что $\operatorname{tr}[g, a] = x_1 + t_1 = 2 + 4yz\Delta^{-1}$. Поэтому из условия $\operatorname{tr}[g, a] = 0$ следует $yz = -\frac{\Delta}{2}$ и $xt = \frac{\Delta}{2}$. Из формул (2) $y_1z_1 = \frac{4}{\Delta^2}xyzt = -1$. Поскольку $\det[g, a] = 1$, то $x_1t_1 = 0$. Но в силу а), б), в) это значит, что $x_1 = t_1 = 0$. Из формул (2) $y_2 = z_2 = 0$. Группа энгелева класса энгелевости меньше или равного 2. Это завершает доказательство.

Теорема 2. *Линейная треугольная топологическая нильгруппа нильпотентна.*

Эта теорема доказывается непосредственным вычислением коммутаторов с применением метода математической индукции.

Из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие. *Линейная топологическая нильгруппа тогда и только тогда локально нильпотентна, когда все ее неприводимые представления локально нильпотентны.*

Теорема 3. *Линейная разрешимая топологическая нильгруппа над полем комплексных чисел локально нильпотентна.*

Доказательство. В силу следствия теорему достаточно доказать для неприводимых групп. Пусть G неприводима. Тогда в G существует нормальный делитель N конечного индекса, все элементы которого приводимы одновременно к диагональному виду [2]. Полагаем, что N — диагональная группа. Кроме того, можно считать, что N — замкнутая подгруппа. Но тогда N — открыта в G.

Рассмотрим $[a, b(m)]$, где $a, b \in G$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует такое m_0, для которого $[a, b(m_0)] = e$. Так как N — открытая подгруппа, то можно считать, что $a \in N$. Отсюда следует, что теорему достаточно доказать в случае $G = \{N, b\}$.

Нетрудно проверить справедливость следующих двух утверждений.

1) Группа N сопряжена в $GL(n, C)$ с группой H, у которой все элементы приводимы одновременно к виду $h = \operatorname{diag}[A_1(h), \ldots, A_l(h)]$, где $A_i(h)$ — вектор размерности n_i, состоящий из равных компонент; n_i, $i = 1, \ldots, l$, — константы, одинаковые для всех $h \in H$. Для любого i существуют $h, h_1 \in H$ такие, что $A_i(h) \neq A_i(h_1)$. Можно считать, что $N = H$.

2) $n_i = n_j$, $i, j = 1, \ldots, l$ (последнее утверждение следует из неприводимости группы G).

Непосредственно проверяется, что

$$a^b = \operatorname{diag}[A_{s_a(1)}(a), \ldots, A_{s_a(l)}(a)], \text{ где } s_a \in S(l).$$

Из утверждений 1) и 2) можно показать, что s_a одинаковы для всех $a \in N$, $s_a \equiv s$.

Поскольку G неприводима, то можно, не ограничивая общности, считать, что $s = (1, 2, \ldots, l)$.

Рассмотрим оператор $D_{b^k}: a \to [a, b^k]$

$$D_{b^k}(a) = \mathrm{diag}\,[A_{s^{k}(1)}(a)\,A_1^{-1}(a), \ldots, A_{s^{k}(l)}A_l^{-1}(a)],$$

где операции «·» и «-1» понимаются как компонентные. Поскольку векторы $A_i(a)$ равнокомпонентны, то, не ограничивая общности, можно считать, что $l = n$; тогда A_i — просто числа.

Пусть Ω — некоторая окрестность e в N такая, что функция $\ln \omega$ существует и однозначна. В силу топологического нильусловия можно считать, что $a \in \Omega$, $[a, b^k(m)] \in \Omega$, $m = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим оператор

$$P_{b^k}(a) = \ln D_{b^k}(a) = \mathrm{diag}\,[\ln A_{s^{k}(1)}(a) - \ln A_1(a), \ldots, \ln A_{s^{k}(n)}(a) - \ln A_n(a)].$$

Из построения следует, что $P^m_{b^k}(a) = \ln D^m_{b^k}(a)$. Поэтому $P^m_{b^k}(a) \to 0$, $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $D^m_{b^k}(a) \to e$, $m \to \infty$.

Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и положим $A_{b^k} = D^k - e$.

Считая $s = (1, \ldots, n)$, легко убедиться, что $P^m_{b^k}(a) = \mathrm{diag}\,[A^m_{b^k} \ln \bar{a}]$, где вектор $\bar{a} = [A_1(a), \ldots, A_n(a)]$.

Пусть B_{b^k} — нормальная форма Жордана матрицы A_{b^k} и T такая матрица, что $B_{b^k} = TA_{b^k}T^{-1}$ (нетрудно видеть, что T одна и та же для всех k).

В силу неособенности T $A^m_{b^k} \ln \bar{a} \to 0$ тогда и только тогда, когда $B^m_{b^k} T \ln \bar{a} \to 0$.

$$B_{b^k} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^k - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n^k - 1 \end{bmatrix},$$

где ε_i — различные корни из 1.

Пусть $T \ln \bar{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Рассмотрим случаи:

а) существует такое i, что $\alpha_i \neq 0$ и $\varepsilon_i \neq 1$, тогда для некоторого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ $|\varepsilon_i^k - 1| \geqslant 1$ и, значит,

$$B^m_{b^k} T \ln \bar{a} = \begin{bmatrix} (\varepsilon_1^k - 1)^m \alpha_1 \\ \cdots \\ (\varepsilon_i^k - 1)^m \alpha_i \\ \cdots \\ (\varepsilon_n^k - 1)^m \alpha_n \end{bmatrix} \not\to 0;$$

б) для всех $i = 1, \ldots, n$, $(\varepsilon_i - 1)\,\alpha_i = 0$, тогда $B^m_b T \ln \bar{a} = 0$.

Отсюда, либо $[a, b^k(m)] \not\to e$, что невозможно, либо $[a, b] = e$, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а 4. *Замкнутая топологическая нильподгруппа G группы $GL(n, C)$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть K — связная компонента G. Из [1] следует нильпотентность K. Так как G — группа Ли, то K — открытая подгруппа. Поэтому для любых a, $b \in G$ существует такое m_0, что $[a, b(m_0)] \in K$.

Значит, можно считать, что $a \in K$.

Рассмотрим группу $K_1 = \{K, b\}$, K_1— расширение нильпотентной группы при помощи циклической, следовательно, K_1 — разрешима. Из теоремы 3 следует локальная нильпотентность K_1. Отсюда, для любых a, $b \in G$ существует такое m_1, что $[a, b(m_1)] = e$, т. е. G — нильгруппа в абстрактном смысле. Из линейности G вытекает ее локальная нильпотентность. Но в [3] доказана нильпотентность замкнутой локально нильпотентной подгруппы $GL(n, C)$. Теорема доказана.

В работе [1, теорема 8] доказывается, что все элементы группы $SU(2)$, за исключением элементов, сопряженных с $g_0 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$,—топологические нильэлементы.

Напомним, что $SU(2) = \left(\begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix}\right)$, $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$.

Уточним этот результат. Имеет место утверждение.

Утверждение. *Пусть M — множество всех топологических нильэлементов группы $SU(2)$. Тогда*

$$M = \left\{ t^{-1} \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in SU(2),\ |\beta| \leqslant \frac{1}{2},\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \right\}.$$

Доказательство этого результата, как и доказательство в [1], заключается в непосредственном вычислении коммутаторов

$$r_m = [g, f(m)], \text{ где } f = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{bmatrix}, \ \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

$$g = \begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix}, \quad [g, f(m)] = \begin{bmatrix} x_m & y_m \\ -\bar{y}_m & \bar{x}_m \end{bmatrix}.$$

Вычисляя коммутаторы, получаем

$$\begin{gathered} x_m = x_{m-1}\bar{x}_{m-1} + y_{m-1}\bar{y}_{m-1}(\alpha^2 - \beta^2) - 2\alpha\beta y_{m-1}\bar{y}_{m-1} i, \\ y_m = 2\beta(\beta - \alpha i)\, x_{m-1} y_{m-1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Произвольная $f \in SU(2)$ унитарно сопряжена с матрицей вида $\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \end{bmatrix}$, где $\gamma = \alpha + \beta i$ и $\gamma\bar{\gamma} = 1$.

Очевидно, $f \in SU(2)$ — топологический нильэлемент тогда и только тогда, когда сопряженный ему элемент $\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \end{bmatrix}$— тополсгический нильэлемент.

Покажем, что если $|\beta| > \frac{1}{2}$, то существует

$$g = \begin{bmatrix} x & y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix} \in SU(2), \quad |x|^2 + |y|^2 = 1,$$

такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} [g, f(n)] \neq e$ в топологии группы $SU(2)$.

Выберем x так, чтобы $|x| = \dfrac{1}{\alpha|\beta|}$. Это возможно, так как $\dfrac{1}{2|\beta|} < 1$.

Воспользуемся (5).

Тогда

$$|y_1|=2|\beta||x_0||y_0|=|y_0|<1,\ |x_1|=\sqrt{1-|y_1|^2}=|x_0|<1;$$

$$|y_2|=2\beta|x_1||y_1|=|y_0|,\ |x_2|=\sqrt{1-|y_0|^2}=|x_0| \text{ и т. д.},$$

$|y_n|=|y_0|<1$, $|x_n|=|x_0|<1$ для любого n, т. е. $[g, f(n)] \not\to \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Пусть $|\beta|\leqslant\frac{1}{2}$. $|y_n|=2|\beta||\beta-\alpha i||x_{n-1}||y_{n-1}|\leqslant|y_{n-1}|$. Отсюда следует, что $|y_n|\leqslant|y_{n-1}|$, т. е. $|y_n|\downarrow$, $|x_n|\uparrow$. Покажем, что $|y_n|\downarrow 0$. Пусть, от противного, $|y_n|\downarrow b$, $b>0$. Тогда $|y_{n-1}|-|y_n|=|y_{n-1}|\times \times(1-2|\beta||x_{n-1}|)$, $|y_{n-1}|\geqslant b$, $|x_{n-1}|\leqslant\sqrt{1-b^2}$, так как $|x_{n-1}|^2+ +|y_{n-1}|^2=1$, $2|\beta|<1$.

Поэтому $|y_{n-1}|-|y_n|\geqslant b(1-\sqrt{1-b^2})=\mathrm{const}>0$ для любого n. Это противоречит тому, что $|y_n|\downarrow b$. Отсюда получаем, что $|x_n|\uparrow 1, |y_n|\downarrow 0$ и $\operatorname{Im} x_n\downarrow 0$, т. е. $x_n\to 1$. Утверждение доказано.

В заключение рассмотрим следующий вопрос.

Пусть G — связная топологическая группа, в некоторой окрестности единицы U которой выполняется соотношение $[a, b(n)]\underset{n\to\infty}{\to}1$ для любых $a,\ b\in U$.

Будет ли это соотношение выполняться во всей группе G? Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим группу над полем вещественных чисел R

$$G=\left(\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \beta\end{bmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma\in R,\ \alpha, \beta>0\right).$$

Пусть $a, b\in G$, $a=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ 0 & \beta_1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$.

Непосредственным вычислением получаем, что для $n\geqslant 2$

$$[a, b(n)]=\begin{bmatrix}1 & \delta\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

где δ — некоторое вещественное число, равное нулю тогда и только тогда, когда a и b перестановочны. Пусть U — такая окрестность единицы G, что для всех элементов из этой окрестности $0<\frac{\alpha}{\beta}<2$.

Тогда для любых $a, b\in U$ $[a, b(n)]\to\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $n\to\infty$. Но для элементов a и b, не перестановочных друг с другом и таких, что $\frac{\alpha}{\beta}>2$ $\lim\limits_{n\to\infty}[a, b(n)]\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов В. П. Локально проективно нильпотентные группы и нильэлементы в топологических группах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, 30, № 1, с. 1257—1275.
2. Супруненко Д. А.Группы матриц.— М.: Наука, 1972.— 350 с.
3. Платонов В. П. Строение топологических локально проективно нильпотентных групп и групп с нормализаторным условием.— Мат. сб., 1967, 72, № 1, с. 38—58.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
4.VII 1978 г.