УДК 517.52

К. М. Слепенчук

Об условиях обратимости в теории абсолютной суммируемости двойных рядов

Устанавливаются теоремы тауберова типа на случай абсолютной суммируемости для матричных преобразований двойных рядов и дается приложение этих теорем к методам Абеля. На случай обычной суммируемости такая задача была решена в [1].

Двойной числовой ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

частичные суммы которого S_{mn}, преобразуем с помощью матрицы $\Gamma = \| \gamma_{kl}^{(mn)} \|$ следующим образом:

$$\Gamma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} u_{kl}. \tag{2}$$

Введем обозначения: $\Delta_{mn}\alpha_{mn} = \alpha_{mn} - \alpha_{m-1n} - \alpha_{mn-1} + \alpha_{m-1\,n-1}$, $\Delta_m\alpha_{mn} = \alpha_{mn} - \alpha_{m-1n}$, $\Delta_n\alpha_{mn} = \alpha_{mn} - \alpha_{mn-1}$.

В дальнейшем будем писать $\alpha_{mn} = \Theta(1)$, если $\{\alpha_{mn}\}$ абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{mn}\alpha_{mn}| < \infty \tag{3}$$

и $\alpha_{mn} = \theta(1)$, если $\{\alpha_{mn}\}$ абсолютно сходится к нулю.

Заметим, что если $\{\alpha_{mn}\}$ абсолютно сходится, то она ограничена.

Двойной ряд (1) $|\Gamma|$-суммируем, если $\Gamma_{mn} = \Theta(1)$.

Теорема 1. *Если* $\sum_{k,l=1}^{\infty} |u_{kl}| < \infty$, *то* $\Gamma_{mn} = \Theta(1)$ *при условии, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{mn}\gamma_{kl}^{(mn)}| = O(1). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} |\Delta_{mn}\Gamma_{mn}| \leqslant \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |\Delta_{mn}\gamma_{kl}^{(mn)}|\,|u_{kl}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |u_{kl}| \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} |\Delta_{mn}\gamma_{kl}^{(mn)}| = O(1),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Регулярный на классе двойных ограниченных рядов Г-метод, удовлетворяющий условию (4), обозначим через $|\Gamma|$.

Пусть $\{\lambda_m\}$, $\{p_m\}$, $\{q_m\}$, $\{\lambda_n^{(1)}\}$, $\{p_n^{(1)}\}$, $\{q_n^{(1)}\}$ — заданные последовательности положительных чисел. Положим

$$f_m=\frac{q_{m-1}}{\lambda_m p_m},\quad g_m=\lambda_m q_m\left(\frac{1}{\lambda_m p_m}-\frac{1}{\lambda_{m+1}p_{m+1}}\right),$$

$$f_n^{(1)}=\frac{q_{n-1}^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}p_n^{(1)}},\quad g_n^{(1)}=\lambda_n^{(1)}q_n^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda_n^{(1)}p_n^{(1)}}-\frac{1}{\lambda_{n+1}^{(1)}p_{n+1}^{(1)}}\right),$$

$$t_{mn}=\lambda_m\sum_{l=1}^{n}u_{ml},\quad \tau_{mn}=\lambda_n^{(1)}\sum_{k=1}^{m}u_{kn},\quad p_{mn}=\frac{1}{q_m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\lambda_k p_k u_{kl},$$

$$q_{mn}=\frac{1}{q_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^{(1)}p_l^{(1)}u_{kl},\quad r_{mn}=\frac{1}{q_m q_n^{(1)}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\lambda_k p_k\lambda_l^{(1)}p_l^{(1)}u_{kl}.$$

Прежде всего, докажем шесть независимых друг от друга предложений, с помощью которых можно ослабить тауберовы условия на случай абсолютной суммируемости.

Теорема 2. *Пусть имеет место* 1) $g_m=\Theta(1)$, $g_n^{(1)}=\Theta(1)$, $f_m=\Theta(1)$, $f_n^{(1)}=\Theta(1)$, *либо* 2) $g_m=\theta(1)$, $g_n^{(1)}=\theta(1)$, $f_m=\Theta(1)$, $f_n^{(1)}=\Theta(1)$, *либо* 3) $g_m=\Theta(1)$, $g_n^{(1)}=\Theta(1)$, $f_m=\Theta(1)$, $f_n^{(1)}=\Theta(1)$, *либо* 4) $g_m=\theta(1)$, $g_n^{(1)}=\theta(1)$, $f_m=\theta(1)$, $f_n^{(1)}=\theta(1)$, *либо* 5) $g_m=\theta(1)$, $g_n^{(1)}=\theta(1)$, $f_m=\Theta(1)$, $f_n^{(1)}=\Theta(1)$, *либо* 6) $g_m=\Theta(1)$, $g_n^{(1)}=\Theta(1)$, $f_m=\theta(1)$, $f_n^{(1)}=\theta(1)$.

Если соответственно этим соотношениям 1) $t_{mn}=\theta(1)$, $\tau_{mn}=\theta(1)$, *либо* 2) $t_{mn}=\theta(1)$, $\tau_{mn}\,\theta(1)$, *либо* 3) $t_{mn}=\Theta(1)$, $\tau_{mn}=\Theta(1)$, *либо* 4) $t_{mn}=\theta(1)$, $\tau_{mn}=\theta(1)$, *либо* 5) $t_{mn}=\theta(1)$, $\tau_{mn}=\theta(1)$, *либо* 6) $t_{mn}=\Theta(1)$, $\tau_{mn}=\Theta(1)$ *являются тауберовыми условиями для* $|\Gamma|$*-метода, то соответственно* 1) $p_{mn}=\theta(1)$, $q_{mn}=\theta(1)$, $r_{mn}=\theta(1)$, *либо* 2) $p_{mn}=\Theta(1)$, $q_{mn}=\Theta(1)$, $r_{mn}=\Theta(1)$, *либо* 3) $p_{mn}=\Theta(1)$, $q_{mn}=\Theta(1)$, $r_{mn}=\Theta(1)$, *либо* 4) $p_{mn}=\theta(1)$, $q_{mn}=\theta(1)$, $r_{mn}=\theta(1)$, *либо* 5) $p_{mn}=\Theta(1)$, $q_{mn}=\Theta(1)$, $r_{mn}=\Theta(1)$, *либо* 6) $p_{mn}=\Theta(1)$, $q_{mn}=\Theta(1)$, $r_{mn}=\Theta(1)$ *— также тауберовы условия для* $|\Gamma|$*-метода.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что

$$u_{kl}=\frac{g_k}{\lambda_k}\,\frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}}\,r_{kl}+\Delta_{mn}(f_{m+1}\,p_{mn}+f_{n+1}^{(1)}q_{mn}-f_{m+1}\,f_{n+1}^{(1)}r_{mn}),$$

откуда

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{g_k}{\lambda_k}\,\frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}}\,r_{kl}+f_{m+1}p_{mn}+f_{n+1}^{(1)}q_{mn}-f_{m+1}f_{n+1}^{(1)}r_{mn}=H_{mn}+v_{mn},$$

где (5)

$$H_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{g_k}{\lambda_k}\,\frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}}\,r_{kl}.$$

В таком случае

$$\Gamma_{mn}=\sum_{k,l=1}^{\infty}\gamma_{kl}^{(mn)}\Delta_{kl}H_{kl}+\sum_{k,l=1}^{\infty}\gamma_{kl}^{(mn)}\Delta_{kl}v_{kl}=\sigma_{mn}^{(1)}+\sigma_{mn}^{(2)}.$$

Так как доказательства всех шести предложений существенно не отличаются друг от друга, то ограничимся доказательством только первого предложения. Итак, пусть $\Gamma=\Theta(1)$, $g_m=\Theta(1)$, $g_n^{(1)}=\Theta(1)$, $f_m=\Theta(1)$,

$f_n^{(1)} = \Theta(1)$ и $p_{mn} = \theta(1)$, $q_{mn} = \theta(1)$, $r_{mn} = \theta(1)$. В таком случае $v_{kl} = \theta(1)$, а следовательно, $\sigma_{mn}^{(2)} = \theta(1)$, если применить теорему 1. А тогда

$$\sigma_n^{(1)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \gamma_{kl}^{(mn)} \Delta_{kl} H_{kl} = \Theta(1). \tag{6}$$

Так как $p_{mn} - p_{mn-1} - (f_{n+1}^{(1)} r_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn-1}) = \frac{g_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}} r_{mn}$, то $\sum_{l=1}^{n} \frac{g_l^{(1)}}{\lambda_l^{(1)}} r_{ml} = p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn}$.

Аналогично $\sum_{k=1}^{m} \frac{g_k}{\lambda_k} r_{kn} = q_{mn} - f_{m+1} r_{mn}$, откуда $H_{mn} - H_{m-1n} = \frac{g_m}{\lambda_m}(p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn})$, $H_{mn} - H_{mn-1} = \frac{g_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}}(q_{mn} - f_{m+1} r_{mn})$.

Поэтому $t_{mn}^* = \lambda_m (H_{mn} - H_{m-1n}) = g_m (p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn})$, $\tau_{mn}^* = \lambda_n^{(1)} (H_{mn} - H_{mn-1}) = g_n^{(1)} (q_{mn} - f_{m+1} r_{mn})$.

Если принять во внимание, что $\sum_{n=1}^{N} |\Delta_n r_{mn}| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} |\Delta_{in} r_{in}| = O(1)$ и $\Delta_{mn}(f_{n+1}^{(1)} r_{mn}) = (f_{n+1}^{(1)} - f_n^{(1)}) \Delta_n r_{mn} + f_n^{(1)} \Delta_{mn} r_{mn}$, то $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{mn}(f_{n+1}^{(1)} r_{mn})| < \infty$,

т. е. $f_{n+1}^{(1)} r_{mn} = \theta(1)$. Следовательно, $p_{mn} - f_{n+1}^{(1)} r_{mn} = R_{mn} = \theta(1)$. Таким же способом покажем, что $g_m R_{mn} = \theta(1)$.

Таким образом,

$$t_{mn}^* = \theta(1), \ \tau_{mn}^* = \theta(1). \tag{7}$$

Так как по предположению условия (7) применительно к преобразованию (6) — тауберовы, то $H_{mn} = \Theta(1)$. Тогда, как видно из (5), $S_{mn} = \Theta(1)$.

Выделим класс $|\Gamma|$-методов, для которых $t_{mn} = \Theta(1)$, $\tau_{mn} = \Theta(1)$ или $t_{mn} = \theta(1)$, $\tau_{mn} = \theta(1)$ — тауберовы.

Для того чтобы преобразование $\gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} u_k$ с помощью матрицы $\gamma = \| \gamma_{nk} \|$ сохраняло абсолютную сходимость, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_n \gamma_{nk}| = O(1)$ (теорема Суноути [2]). Матрицы $\| \gamma_{nk} \|$, сохраняющие абсолютную сходимость, обозначим через $|\gamma|$.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\gamma_{kl}^{(mn)} = \gamma_{mk}^{(1)} \gamma_{nl}^{(2)}$, где $\gamma^{(1)} = \| \gamma_{mk}^{(1)} \|$ и $\gamma^{(2)} = \| \gamma_{nl}^{(2)} \|$ суть $|\gamma|$-матрицы.

$|\gamma^{(1)}|$ и $|\gamma^{(2)}|$ — методы, для которых

а) $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_{mk}^{(1)}| < \infty$, $m = 1, 2, \ldots$; $\sum_{l=1}^{\infty} |\gamma_{nl}^{(2)}| < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$,

б) матрицы $\| \alpha_{mk} \|$ и $\| \beta_{nl} \|$, члены которых $\alpha_{mk} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{\lambda_i} - \sum_{i=k}^{m} 1/\lambda_i$,

$1 \leqslant k \leqslant m$, $\alpha_{mk} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{\lambda_i}$, $k > m$, $\beta_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}} - \sum_{i=l}^{n} 1/\lambda_i^{(1)}$, $1 \leqslant l \leqslant n$,

$\beta_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}}$, $l > n$

— $|\gamma|$-матрицы, обозначим соответственно через $|(\gamma^{(1)}, \lambda)|$ и $|(\gamma^{(2)}, \lambda^{(1)})|$. $|\Gamma|$-метод, для которого матрицы $(\gamma^{(1)})$ и $(\gamma^{(2)})$ являются $|(\gamma^{(1)}, \lambda)|$- и $|(\gamma^{(2)}, \lambda^{(1)})|$-методами, обозначим через $|(\Gamma, \lambda, \lambda^{(1)})|$.

Теорема 3. *Если двойной ряд* (1) $|\Gamma, \lambda, \lambda^{(1)})|$*-суммируем, то* $S_{mn} = \Theta(1)$, *если* $t_{mn} = \Theta(1)$ *и* $\tau_{mn} = \Theta(1)$.

Доказательство. Так как при данных условиях $u_{kl} = O(1)$, то в силу а) двойной ряд (2) сходится абсолютно, а следовательно, его можно заменить повторным. Рассмотрим тождество

$$\Gamma_{mn} - S_{mn} = \left[\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} (S_{ml} - S_{ml-1}) - S_{mn}\right] + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} u_{kl} - (S_{ml} - S_{ml-1})\right] = \sigma_{mn}^{(3)} + \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_{nl}^{(2)} \sigma_{ml}^{(4)} = \sigma_{mn}^{(3)} + \sigma_{mn}^{(5)}. \tag{8}$$

Покажем, что $\sigma_{mn}^{(3)} = \Theta(1)$, $\sigma_{mn}^{(5)} = \Theta(1)$. Для этого заметим, что $S_{mn} - S_{mn-1} = \tau_{mn}/\lambda_n^{(1)}$, $S_{mn} - S_{m-1n} = t_{mn}/\lambda_m$.

Положим $\delta_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}}$. Применяя преобразование Абеля,

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{nl} \Delta_l \tau_{ml} = \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml} + \delta_{nN} \tau_{mN},$$

откуда $\sum_{l=1}^{\infty} \delta_{nl} \Delta_l \tau_{ml} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml}$, а следовательно,

$$\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_{nl}^{(2)}}{\lambda_l^{(1)}} \tau_{ml} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l^{(1)}} \sum_{i=1}^{l} \Delta_i \tau_{mi} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{i=l}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(2)}}{\lambda_i^{(1)}}\right) \Delta_l \tau_{ml} - \sum_{l=1}^{n} \Delta_l \tau_{ml} \left(\sum_{i=l}^{n} \frac{1}{\lambda_i^{(1)}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ni} \Delta_i \tau_{mi}.$$

В таком случае $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{mn} \sigma_{mn}^{(3)}| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_n \beta_{ni}| \, |\Delta_{mi} \tau_{mi}| = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n \beta_{ni}| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{mi} \tau_{mi}| = O(1)$.

Далее, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_{ni}^{(1)}}{\lambda_i}\right) \Delta_{kl} t_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{mk}^{(1)} \Delta_l t_{kl} \cdot \frac{1}{\lambda_k}$, то

$$\sigma_{ml}^{(4)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\gamma_{mi}^{(1)}}{\lambda_i}\right)\Delta_{kl}t_{kl}-\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=k}^{m}1/\lambda_i\right)\Delta_{kl}t_{kl}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{mk}\Delta_{kl}t_{kl}.$$

Таким образом $\sigma_{mn}^{(5)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_{mk}\gamma_{nl}^{(2)}\Delta_{kl}t_{kl}$.

Так как матрицы $\|\alpha_{mk}\|$ и $\|\gamma_{nl}^{(2)}\|$ суть $|\gamma|$-матрицы, то матрица $\|\alpha_{mk}\gamma_{nl}^{(2)}\|$ — $|\Gamma|$-матрица. Следовательно, $\sigma_{mn}^{(5)}=\Theta(1)$, если применить теорему 1. А тогда, как показывает (8), $S_{mn}=\Theta(1)$.

Пусть задана функция $f(x, y)$ и $\{x_m\}$ и $\{y_n\}$ — некоторые последовательности, принадлежащие соответственно отрезкам (a, b) оси абцисс и (c, d) оси ординат. Положим в (3) $\alpha_{mn}=f(x_m, y_n)$. Если сумма в (3) равномерно ограничена относительно любого выбора $\{x_m\}$ и $\{y_n\}$, то будем говорить, что $f(x, y)$ имеет ограниченную вариацию в $[a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d]$.

Двойной ряд (1) $|(A, \delta, \nu)|$-суммируем, если функция

$$f(x, y)=\sum_{k,l=1}^{\infty}x^{\delta_k}y^{\nu_l}u_{kl},\ \delta_k\uparrow\infty,\ \nu_l\uparrow\infty,$$

— функция ограниченной вариации в $[h_1\leqslant x<\infty,\ h_2\leqslant y<\infty]$, $h_1>0$, $h_2>0$.

Теорема 4. *Если двойной ряд* (1) $|(A, \delta, \nu)|$-*суммируем, то* $S_{mn}=\Theta(1)$, *если*

$$t_{mn}^{(1)}=\frac{\delta_m}{\delta_{m+1}-\delta_m}\sum_{l=1}^{n}u_{ml}=\theta(1),\quad \tau_{mn}^{(1)}=\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}-\nu_n}\sum_{k=1}^{m}u_{kn}=\theta(1)$$

и

$$\delta_{m+1}-\delta_m\leqslant\delta_m-\delta_{m-1}\leqslant 1,\ \nu_{n+1}-\nu_n\leqslant\nu_n-\nu_{n-1}\leqslant 1. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $x=1-1/\delta_{m+1}$, $y=1-1/\nu_{n+1}$. Тогда

$$\Gamma_{mn}=\sum_{k,l=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\delta_{m+1}}\right)^{\delta_k}\left(1-\frac{1}{\nu_{n+1}}\right)^{\nu_l}u_{kl}=\Theta(1).$$

Рассмотрим Γ-матрицу, для которой $\gamma^{(1)}=\left\|\left(1-\frac{1}{\delta_{m+1}}\right)^{\delta_k}\right\|$, $\gamma^{(2)}=\left\|\left(1-\frac{1}{\nu_{n+1}}\right)^{\nu_l}\right\|$.

Положим в теореме 3 $\lambda_m=\delta_m/\delta_{m+1}-\delta_m$, $\lambda_n^{(1)}=\nu_n/\nu_{n+1}-\nu_n$. В работе [3] показано, что $\gamma^{(1)}$-матрица является $|(\gamma^{(1)}, \lambda)|$-матрицей, если выполнено условие (9). В силу идентичности, $\gamma^{(2)}$-матрица является $|(\gamma^{(2)}, \lambda^{(1)})|$-матрицей. Осталось применить теорему 3.

Тауберовы условия в этой теореме можно ослабить.

Теорема 5. *Если двойной ряд* (1) $|(A, \delta, \nu)|$-*суммируем, то* $S_{mn}=\Theta(1)$, *если*

$$p_{mn}^{(1)}=\frac{1}{\delta_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\delta_k u_{kl}=\theta(1),\ q_{mn}^{(1)}=\frac{1}{\nu_{n+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\nu_l u_{kl}=$$

$$=\theta(1),\ r_{mn}^{(1)}=\frac{1}{\delta_{m+1}\nu_{n+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\delta_k\nu_l u_{kl}=\theta(1)$$

и выполнено условие (9).

Для доказательства теоремы необходимо воспользоваться теоремой 3 и теоремой 2 (предложение 1), положив в ней $q_m = \delta_{m+1}$, $q_n^{(1)} = \nu_{n+1}$, $\lambda_m = \delta_m/\delta_{m+1} - \delta_m$, $\lambda_n^{(1)} = \nu_n/\nu_{n+1} - \nu_n$, $p_m = \delta_{m+1} - \delta_m$, $p_n^{(1)} = \nu_{n+1} - \nu_n$.

Заметим, что условию (9) удовлетворяют, например, последовательности $\delta_m = m$, $\nu_n = n$, или $\delta_m = \ln m$, $\nu_n = \ln n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепенчук К. М. Об условиях обратимости в теории суммируемости двойных рядов.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 6, с. 830—835.
2. Sunouchi G. Notes on Fourier analysis (XVIII): Absolute summability of series with constant terms.— Tohoku Math. J., 1949, (2), 1, p. 57—65.
3. Слепенчук К. М. Теоремы тауберова типа для абсолютной суммируемости методами Абеля.— Изв. вузов. Математика, 1965, № 6, с. 135—139.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию
8.VI 1978 г.