УДК 517.5

Г. М. Березовская, Н. И. Березовский

Об асимптотическом представлении функций Λ-базиса

Пусть Λ — интегро-дифференциальный оператор вида

$$\Lambda y = Ly + \sum_{\nu=0}^{n-1} H_\nu D^\nu y, \tag{1}$$

где L — дифференциальный оператор

$$L = D^n + p_1(x) D^{n-1} + \ldots + p_n(x) I,\ D = \frac{d}{dx}, \tag{2}$$

с непрерывными на $(a, b) \subset \mathbf{R}$ коэффициентами, а H_ν — интегральные операторы

$$(H_\nu y)(x) = \int_{x_0}^{x} H_\nu(x, t)\, y(t)\, dt \tag{3}$$

с ограниченными и измеримыми в квадрате $(a, b) \times (a, b)$ ядрами и $a < x_0 < b$.

Разыскивая аналитическое относительно $\lambda \in \mathbf{C}$ решение $y(x, \lambda)$ задачи

$$\Lambda y = \lambda^n y,\ y^{(\nu)}|_{x=x_0} = \lambda^\nu, \qquad 0 \leqslant \nu < n,$$

в виде

$$y(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) \lambda^m, \tag{4}$$

приходим к выводу, что последовательность функций $\{\varphi_m(x)\}_0^\infty$ должна удовлетворять условиям

$$\Lambda\varphi_m = \begin{cases} 0, & m < n \\ \varphi_{m-n}, & m \geqslant n \end{cases},\quad D^\nu \varphi_m|_{x=x_0} = \delta_{\nu m}, \tag{5}$$

$$0 \leqslant \nu < n,\ m \geqslant 0.$$

Такую последовательность принято называть Λ-базисом в точке x_0 (см. [1, 2]) или базисной относительно оператора Λ системой функций, а $y(x, \lambda)$ из (4) — порождающей функцией.

При рассмотрении многих вопросов математики с использованием метода воспроизводящих функций или разработанного в [1] (см. также [2]) метода аналитических относительно заданного оператора функций, а также рядов по функциям Λ-базиса, важную роль играют асимптотические представления для функций Λ-базиса и их производных при больших номерах.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема.

Теорема. *Если функции $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ непрерывны на интервале $(a, b) \subset \mathrm{R}$, а функции $H_0(x, t), \ldots, H_{n-1}(x, t)$ ограничены и измеримы на*

$(a, b) \times (a, b)$, то для функций Λ-базиса в точке $x_0 \in (a, b)$ и их производных до порядка $n-1$ включительно справедливы асимптотические представления

$$\varphi_m^{(\nu)}(x) = \exp\left[-\frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt\right]\frac{(x-x_0)^{m-\nu}}{(m-\nu)!}\,[1+\varepsilon_{m,\nu}(x)], \tag{6}$$

где функции $\varepsilon_{m,\nu}(x)$ стремятся к нулю при $m \to \infty$ равномерно на каждом отрезке $\Delta \subset (a, b)$, $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$.

Если же коэффициент при D^{n-1} в (2) отсутствует или непрерывно-дифференцируем до порядка $n-1$ включительно, то произведения $\{m\varepsilon_{m,\nu}(x)\}$ равномерно ограничены на Δ.

В этой теореме содержатся результаты (в смысле представлений) работ [3—6]. Если через H обозначить интегральную часть оператора Λ, то кратко рассмотренные в упомянутых работах случаи можно охарактеризовать следующим образом: $H=0$, $p_1=0$, $\nu=0$ — в [3]; $H \neq 0$, $p_1=0$, $\nu=0$ — в [4]; $H=0$, $p_1=0$, $\nu \neq 0$ — в [5]; $H=0$, $p_1 \neq 0$, $\nu=0$ — в [6]. Остальные же случаи охвачены сформулированной выше теоремой.

Доказательство. Как показано в [4], функции Λ-базиса представимы интегрально

$$\varphi_m(x) = \int_{x_0}^{x} S(x, t)\,\varphi_{m-n}(t)\,dt, \quad m \geqslant 0, \tag{7}$$

и

$$\varphi_{qn+r}(x) = \int_{x_0}^{x} S_q(x, t)\,\varphi_r(t)\,dt, \qquad 0 \leqslant r < n, \ q \geqslant 1,$$

где S_q — q-е итерированное ядро для $S(x, t)$. Найдя для функций $\varphi_r(x)$, $0 \leqslant r < n$ разложения по формуле Тейлора в точке x_0 и представления для $\partial^\nu S_q(x, t)/\partial x^\nu$, можно доказать, что

$$\varphi_m^{(\nu)}(x) = \frac{(x-x_0)^{m-\nu}}{(m-\nu)!}\,\alpha_{m,\nu}(x), \qquad 0 \leqslant \nu < n, \ m \geqslant 0, \tag{8}$$

где функции $\{\alpha_{m,\nu}(x)\}$ равномерно ограничены на каждом фиксированном отрезке Δ из (a, b).

Пусть $\Lambda = L_1 + B$, где $L_1 = D^n + p_1(x)\,D^{n-1}$. Функция Коши — Грина оператора L_1 имеет вид $K_1(x, t) = \int_t^x \frac{(x-v)^{n-2}}{(n-2)!}\exp\left[-\int_t^v p\,du\right]dv$. С ее помощью равенство $\Lambda\varphi_m = \varphi_{m-n}$, $m \geqslant n$ можно переписать в виде

$$\varphi_m(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x, t)\,[\varphi_{m-n}(t) - (B\varphi_m)(t)]\,dt, \quad m \geqslant n. \tag{9}$$

Из предварительных представлений (8) следует, что

$$(B\varphi_m)(x) = \frac{(x-x_0)^{m-n+2}}{(m-n+2)!}\,\psi_m(x),$$

где $\{\psi_m(x)\}$ — равномерно ограниченная на любом компакте из (a, b) последовательность функций. Далее, исходя из (9) и рассуждая как в [6], находим представление (6) для случая $\nu = 0$. Для $\nu \neq 0$ они находятся из только что полученного и интегрального представления (7).

Если $p_1(x) \equiv 0$, то $K_1(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, и тогда легко проследить, что $\{m\alpha_{m,\nu}(x)\}$ ограничены.

Если же $p_1(x) \not\equiv 0$, но $n-1$ раз непрерывно дифференцируемо, то предварительно делаем замену $y = \tilde{y} \exp\left[-\frac{1}{n} \int\limits_{x_0}^{x} p_1(u)\, du\right]$ (см. [4]), избавляясь от коэффициента при D^{n-1}.

При наличии хороших асимптотических представлений для функций Λ-базиса ряды вида $\sum\limits_0^\infty a_m \varphi_m(x)$ ведут себя аналогично степенным рядам $\sum\limits_0^\infty a_m \frac{(x-x_0)^m}{m!}$ и могут быть использованы при решении ряда важных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной.— Труды Моск. мат. о-ва, 1958, 7, с. 227—268.
2. Валицький Ю. М. Функції, аналітичні відносно деяких інтегро-диференціальних операторів та їх застосування.— Допов. АН УРСР, 1959, № 3, с. 237—240.
3. Леонтьев А. Ф. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функции.— Сиб. мат. журн., 1960, 1, № 3, с. 456—487.
4. Валицкий Ю. Н., Березовский Н. И. О первой теореме Абеля для некоторых функциональных рядов.— В кн.: Вопросы математической физики и теории функций. Киев: Наук. думка, 1964, с. 12—17.
5. Григорчук И. Ф. Оценки функций L-базиса и одно обобщение многочленов Бернштейна.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 1, с. 18—25.
6. Сиденко Н. И. О представлении функции L-базиса.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 1, с. 106—112.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
26.VI 1978 г.