

Э. Н. Береславский

**Об одном методе конформного отображения
круговых четырехугольников**

1. Обычно с уравнением Хилла

$$v'' + \left(\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos 2n\tau \right) v = 0 \quad (1)$$

связывается следующая задача [1]. По заданным постоянным θ_n требуется определить характеристический показатель μ такой, чтобы интегралы уравнения (1) обладали свойствами

$$v_{1,2}(\tau) = e^{\pm i\mu\tau} \varphi_{1,2}(\tau), \quad \varphi_{1,2}(\tau + \pi) = \varphi_{1,2}(\tau). \quad (2)$$

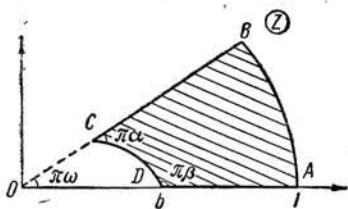
Как известно, дело сводится к нахождению корней уравнения

$$\sin^2 \frac{\pi \mu i}{2} = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{\theta_0}}{2}, \quad (3)$$

где $\Delta(0)$ — определитель Хилла

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\theta_1}{\theta_0 - 2^2} & \frac{\theta_2}{\theta_0 - 2^2} \\ \frac{\theta_1}{\theta_0} & 1 & \frac{\theta_1}{\theta_0} \\ \frac{\theta_2}{\theta_0 - 2^2} & \frac{\theta_1}{\theta_0 - 2^2} & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Большой практический интерес представляет обратная задача, возникающая при конформном отображении верхней полуплоскости на четырехугольник, ограниченный дугами окружностей и отрезками прямых (круговой четырехугольник). Здесь характеристический показатель μ удается найти, исходя из геометрических соображений [2], и требуется определить так называемый аксессуарный параметр, содержащийся в коэффициентах θ_n уравнения (1), а также прообраз одной из вершин четырехугольника.



Эти параметры заранее неизвестны, что сильно усложняет непосредственное интегрирование уравнения; известно только [3], что они однозначно определяются по заданному четырехугольнику, однако никаких эффективных методов для их нахождения не существует*. В силу этого задача конформного отображения четырехугольника решена лишь для нескольких частных случаев (см., например, последние из известных нам в этом направлении работ [4—7]). При этом до сих пор рассматривались четырехугольники, у которых три угла — прямые.

В настоящей статье решается задача об определении неизвестных параметров при конформном отображении на полуполосу кругового четырехугольника с двумя прямыми и двумя произвольными углами. В отличие от существующих методов нахождения отображающей функции, основанных на предложенной в свое время В. А. Фоком идее построения интегралов уравнения Ламе в виде рядов по степеням малого параметра (для коэффициентов которых не удавалось найти рекуррентных формул), предлагаемый ниже метод позволяет определить все неизвестные параметры и коэффициенты с требуемой точностью вычислений.

2. Пусть на плоскости z задан круговой четырехугольник с прямыми углами при вершинах A и B и углами $\pi \alpha$ и $\pi \beta$ при вершинах C и D соответственно. Как следует из теории Шварца (см., например, [3]), функция $z = z(\xi)$, дающая конформное отображение четырехугольника на верхнюю полуплоскость ξ , при котором вершины A, B, C, D переходят в точки $\xi = 0, 1, \infty, -\xi_D$ соответственно, может быть представлена

* В работе [8] показана принципиальная возможность построения уравнения для аксессуарной постоянной в общем случае кругового четырехугольника, однако вопрос об его практическом определении и, притом, в форме, удобной для приложений, остается до сих пор открытым.

как частное двух надлежащим образом выбранных интегралов уравнения

$$u'' + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi-1} + \frac{1}{\xi+\xi_D} \right) u' + \frac{1}{4} \left[\frac{\frac{1}{4} - \beta^2}{(\xi + \xi_D)^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)\xi + h}{\xi(\xi-1)(\xi + \xi_D)} \right] u = 0. \quad (5)$$

Величина ξ_D и аксессуарный параметр h в уравнении (5) остаются пока неопределенными, что и создает отмеченные выше трудности.

Перейдем в (5) к новым переменным $\xi = \sin^2 \tau$, $v = u(\xi_D + \sin^2 \tau)^{1/4}$. Тогда верхней полуплоскости ξ будет соответствовать в плоскости τ полуполоса, при этом $\xi_D = \text{sh}^2 \frac{\alpha}{2}$ ($0 < \text{Re } \tau < \frac{\pi}{2}$, $\text{Im } \tau > 0$). Если теперь введем малый параметр $q = \exp(-\alpha)$, ($0 < q < 1$), то в результате придем к уравнению (1), в котором $\theta_n = [\theta_0 - \alpha^2 - (1 - \beta^2)\eta]q^n$ и аксессуарный параметр θ_0 соответствующим образом связан с h .

В дальнейшем круговой четырехугольник будем характеризовать взаимным расположением двух противоположных сторон AD и BC .

При этом возможны два случая.

1) Стороны AD и BC пересекаются при продолжении под углом $\pi\omega$ ($0 < \omega < 2\pi$)*. Тогда с помощью дробно-линейного преобразования точки их пересечения всегда можно поместить в начало координат и на бесконечность, при этом пересекающиеся стороны превращаются в прямые. Очевидно, что такой четырехугольник может быть изображен в виде четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок).

Используя соотношение $z(\tau + \pi) = e^{2\pi\omega i} z(\tau)$, непосредственно следующее из принципа симметрии, а также свойства интегралов (2), получаем отображающую функцию

$$z(\tau) = e^{2\omega\tau i} \frac{\Phi_1(\tau)}{\Phi_2(\tau)}. \quad (6)$$

Если теперь, следуя работе [1], положить $\theta_{-n} = \theta_n$ и искать $\Phi_1(\tau)$ в виде $\Phi_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2n\tau i}$, то для определения вещественных коэффициентов b_n придем к системе

$$(2n + \omega)^2 b_n - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k b_{n-k} = 0 \quad (n = \dots - 1, 0, 1, \dots), \quad (7)$$

имеющей не нулевые решения в том случае, когда параметры θ_0 и q удовлетворяют уравнению (3). Как известно [1], в качестве второго линейно независимого решения можно взять $\Phi_2(\tau) = \Phi_1(-\tau)$.

Легко видеть, что функция (6) переводит стороны AD , AB и BC полуполосы плоскости τ на одноименные стороны четырехугольника плоскости z .

Совпадение же стороны CD будет иметь место при надлежащих θ_0 и q ; для чего потребуем соответствия вершин D . Это приведет к равенству

$$b = q^\omega \frac{\Phi_1\left(\frac{\alpha}{2} i\right)}{\Phi_1\left(-\frac{\alpha}{2} i\right)}. \quad (8)$$

* В работах [4, 6] изучены случаи пересечения под прямым углом, а в [5] — когда $\omega = \frac{1}{2} - \alpha$.

Итак, неизвестные параметры θ_0 и q полностью определяются по геометрическим характеристикам четырехугольника из уравнений (3) и (8).

2) Стороны AD и BC не имеют при продолжении общих точек. Как известно [3], тогда четырехугольник можно преобразовать так, чтобы эти стороны обратились в дуги концентрических окружностей с радиусами 1 и R соответственно. В этом случае все предыдущие формулы сохраняют свою силу, если только под углом $\pi\omega$, согласно [3], понимать величину $i \ln R$, а под b_n — комплексные постоянные ($b_{-n} = \bar{b}_n$).

3. Систему уравнений (3) и (8), преобразованную к виду

$$\theta_{i+1} = \frac{4}{\pi^2} \arcsin^2 \frac{\sin \frac{\pi\omega}{2}}{\sqrt{\Delta_i}}, \quad (9)$$

$$q_{i+1} = \left[b \frac{\sum_{n=-N}^N b_n q_i^{N-n}}{\sum_{n=-N}^N b_n q_i^{N+n}} \right]^{1/\omega},$$

решаем по простой итеративной схеме. За начальные приближения принимаем значения $\theta_{0(0)} = \omega^2$ и $q_0 = 0$, соответствующие предельному случаю, когда сторона CD стягивается в начало координат, а четырехугольник вырождается в треугольник. При этом на каждом шаге итерации вычисляем определитель Хилла (4) $N+1$ -го порядка и решаем систему N линейных алгебраических уравнений (7) (при фиксированном $b_0 = 1$), где $n = N$ — наибольшее четное число, определяемое из условия $|\theta_n| < \varepsilon = 10^{-6}$.

Анализ вычислений показал, что параметр θ_0 весьма незначительно отличается от величины ω^2 ; существенным образом изменяется величина q , которая в основном и определяет характер коэффициентов θ_n в (1). При этом величина определителя Хилла (4) изменяется в пределах от 1 при малых q до значения 0,56769, соответствующего $q = 0,70748$. Кроме того, с возрастанием b сходимость ряда в (1), особенно для больших значений ω , ухудшается, а число итераций, требующееся для решения системы (9) с точностью 10^{-6} , возрастает от 3—5 при малых ω и b до 33—40 при больших.

Для контроля правильности проведенных вычислений результаты расчета для $\alpha = \beta = \omega = \frac{1}{2}$ сравнивались с имеющимся точным решением и совпали с точностью до 10^{-3} . В этом случае отображающая функция выражается в замкнутой форме

$$z(\tau) = i \exp \left[- \frac{\pi i F \left(\frac{\pi}{2} - \tau, k \right)}{2K} \right],$$

где $F(\tau, k)$ — эллиптический интеграл первого рода при модуле $k = \operatorname{sch} \left(-\frac{1}{2} \ln q \right)$, $k = K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода,

$K' = K(k')$, при этом модуль k находится из условия $\frac{K'}{K} = -\frac{2 \ln b}{\pi}$ и

$$\theta_0 = \frac{2q^2 - \frac{3}{2}}{q^2 - 1} + \left(\frac{\pi}{4kK} \right)^2 (1 - q^2).$$

Пример. $\alpha = 0, \beta = 0, \omega = \frac{1}{6}, b = 0,5.$

Начальные приближения $\theta_{(0)} = 0,0277813, q_{(0)} = 0,1.$ Для них находим $N = 8, \Delta(0) = 0,9877$

$$b_{-4} = -0,0000046, b_{-3} = -0,0000671, b_{-2} = -0,0011477, \\ b_{-1} = -0,0290093,$$

$$b_1 = -0,0206885, b_2 = -0,0010164, b_3 = -0,0000646, b_4 = -0,0000046.$$

1 итерация $\theta_{(1)} = 0,0281318, q_{(1)} = 0,0474113, N = 6, \Delta(0) = 0,99724$

$$b_{-3} = -0,0000072, b_{-2} = -0,0002586, b_{-1} = -0,0138080, \\ b_1 = -0,0098591, b_2 = -0,0002292, b_3 = -0,0000069.$$

2 итерация $\theta_{(2)} = 0,0278563, q_{(2)} = 0,0437979, N = 6, \Delta(0) = 0,99765$

$$b_{-3} = -0,0000056, b_{-2} = -0,0002207, b_{-1} = -0,0127605, \\ b_1 = -0,00911183, b_2 = -0,0001957, b_3 = -0,0000054.$$

3 итерация $\theta_{(3)} = 0,0278448, q_{(3)} = 0,0438182, N = 6, \Delta(0) = 0,99765$

$$b_{-3} = -0,0000057, b_{-2} = -0,0002209, b_{-1} = -0,0127665, \\ b_1 = -0,00911161, b_2 = -0,0001958, b_3 = -0,0000054.$$

4 итерация $\theta_{(4)} = 0,0278448, q_{(4)} = 0,0438184.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: Физматгиз, 1962.— 343 с.
2. Береславский Э. Н. Об одном свойстве некоторых задач фильтрации.— В кн.: Краевые задачи гидроаэромеханики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 214—220.
3. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 406 с.
4. Пергаменцева Э. Д. Некоторые плоские задачи электростатики, связанные с конформным отображением круговых четырехугольников.— Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 5, с. 935—944.
5. Береславский Э. Н. О конформном отображении кругового четырехугольника с равными углами.— Вычисл. и прикл. мат., 1973, вып. 21, с. 106—111.
6. Береславский Э. Н. К вопросу решения одной задачи фильтрации из канала.— В кн.: Краевые задачи подземной гидродинамики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 150—159.
7. Пергаменцева Э. Д. Электростатическое поле цилиндрического проводника, помещенного между параллельными проводящими плоскостями или внутри двугранного угла с проводящими стенками. Журн. техн. физики. Л., 1977, 47, вып. 1, с. 31—35.
8. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые четырехугольники.— ДАН СССР, 1977, 233, № 4, с. 563—566.

Ленинградский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
28.XII 1978 г.