УДК 517.5

Н. Н. Задерей

О приближении суммами Фурье классов периодических функций многих переменных, определяющихся полигармоническими операторами

Пусть $\Delta^r H_\omega^N$ — класс 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$, для которых функция $\varphi(x) = \varphi_f(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f)$, где $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $r = 0, 1, 2 \ldots$, удовлетворяет условию

$$|\varphi(x)-\varphi(x')|=|\varphi(x_1,\ldots,x_N)-\varphi(x'_1,\ldots,x'_N)|\leqslant\sum_{i=1}\omega_i(|x_i-x'_i|), \tag{1}$$

$\omega_i(t_i)$, $i=\overline{1,N}$ — произвольные фиксированные модули непрерывности.

В случае $r=0$ полагаем $\Delta^0 H^N_\omega = H^N_\omega$ и, следовательно, считаем $\varphi_f(x)\equiv f(x)$.

Далее,

$$S_n(f;\,x)=\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{Q^N} f(t)\,D_n(t-x)\,\mathrm{dt};\quad Q^N=\{x:|x_i|\leqslant\pi\},$$

$$D_n(t)=\prod_{i=1}^{N} D_{n_i}(t_i)$$

— частные прямоугольные суммы Фурье функции $f(x)$ порядка $n=(n_1,\ldots$ $\ldots n_N)$, n_i — произвольные натуральные числа, $i=\overline{1,N}$, $D_{n_i}(t_i)=$
$=\dfrac{\sin\dfrac{2n_i+1}{2}\,t_i}{2\sin\dfrac{t_i}{2}}$ — ядро Дирихле порядка n_i.

В настоящей работе изучается поведение величины

$$\mathcal{E}^N_n=\mathcal{E}^N_n(\omega)=\sup_{f\in\Delta^r H^N_\omega}\|f(x)-S_n(f;\,x)\|_C \tag{2}$$

при условии, что координаты n_i вектора n неограниченно возрастают произвольным образом. Именно, получаем точную по порядку оценку сверху величины $\mathcal{E}^N_n(\omega)$ и в случае, когда функции $\omega_i(t_i)$, $i=\overline{1,N}$, выпуклые, находим для нее асимптотические равенства, дающие полное решение задачи Колмогорова—Никольского (см. по этому поводу [1]).

При $r=0$ эта задача полностью решена в [1]. Случай $N=2$, $r\neq 0$ рассмотрен в работе [2].

Отметим, что идея введения классов функций, определяемых полигармоническими операторами, принадлежит Я. С. Бугрову [3], где он рассмотрел классы Δ^r_p $(N=2)$, в наших обозначениях определяющихся условием

$$\|\varphi(x_1,x_2)\|_p=\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\varphi(t_1,t_2)|^p\,dt_1dt_2\right)^{1/p}<1,\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Нетрудно усмотреть, что для функций класса $\Delta^r H^N_\omega$ можно получить интегральное представление, аналогичное используемому в [3], а именно

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}2^{-\lambda(p)}\frac{(-1)^r}{|p|^{2r}\pi^N}\int\limits_{Q^N}\varphi(t)\prod_{i=1}^{N}\cos p_i(x_i-t_i)\,\mathrm{dt}, \tag{3}$$

где $p=(p_1,\ldots,p_N)$, $p_i=0,1,\ldots$ $(i=\overline{1,N})$, $\lambda(p)$ — число равных нулю координат вектора p, $|p|=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}p_i^2\right)^{1/2}$.

Справедливо равенство

$$\frac{(-1)^r}{|p|^{2r}\pi^N}\int\limits_{Q^N}\varphi(t)\prod_{i=1}^{N}\cos p_it_idt=\frac{1}{\pi^N}\int\limits_{Q^N}f(t)\prod_{i=1}^{N}\cos p_it_idt. \tag{4}$$

Легко видеть, что $\mathcal{E}_n^N(\omega) = \sup\limits_{f\in\Delta_0^r H_\omega^N} |S_n(f;0)|$, где $\Delta_0^r H_\omega^N$ — подмножество функций класса $\Delta^r H_\omega^N$, четных по каждой из переменных и таких, что $f(0)=0$.

В дальнейшем существенно используются результаты из [1], а также понятия простой функции, ее размерности $\dim f$ и главной части Гл f, введенные там.

Докажем вспомогательные утверждения, необходимые при нахождении асимптотически точных равенств для величины $\mathcal{E}_n^N(\omega)$ и, может быть, представляющих определенный самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Если $f(t)\in\Delta_0^r H_\omega^N$ — простая функция размерности l, зависящая от переменных $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l}$, $1\leqslant l\leqslant N$, то имеет место соотношение*

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^l \int\limits_{R_\pi} f(t)\prod_{\nu=1}^{l} D_{n_{i_\nu}}(t_{i_\nu})\,dt = (-1)^l\left(\frac{2}{\pi}\right)^l\times$$

$$\times\int\limits_{R_\pi}\varphi(t)\sum_{\substack{p_{i_\nu}\in[n_{i_\nu}+1,\infty]\\ \nu=\overline{1,l}}}\frac{(-1)^r\prod\limits_{\nu=1}^{l}\cos p_{i_\nu}t_{i_\nu}dt}{(p_{i_1}^2+\ldots+p_{i_l}^2)^r}, \tag{5}$$

где $R_\pi=[t:0\leqslant t_{i_\nu}\leqslant\pi,\ \nu=\overline{1,\ l};\ t_j\equiv 0,\ j\neq i_\nu]$, $\varphi(t)=\Delta^r f(t)\in H_\omega^N$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^l \int\limits_{R_\pi} f(t)\prod_{\nu=1}^{l} D_{n_{i_\nu}}(t_{i_\nu})\,dt =$$

$$=(-1)^l\left(\frac{2}{\pi}\right)^l\int\limits_{R_\pi} f(t)\sum_{\substack{p_{i_\nu}\in[n_{i_\nu}+1,\infty]\\ \nu=\overline{1,l}}}\prod_{\nu=1}\cos p_{i_\nu}t_{i_\nu}dt, \tag{6}$$

в чем убеждаемся, воспользовавшись индукцией по числу l.

Далее, учитывая соотношение (4), из (6) получаем лемму 1.

Обозначим через G_N^k множество всевозможных k-мерных целочисленных векторов $j(k)=(j_1,\ldots j_k)$, $k=\overline{1,\ N-1}$, координаты которых удовлетворяют условию $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant N$, $G_N^0=\{0\}$, $C_{j(k)}$ — множество всех натуральных чисел, не превышающих N и отличных от координат вектора $j(k)$: $C_{j(k)}=\{i_1, i_2, \ldots, i_{N-k}\}$,

$$R_{j(k)}=\{t:0\leqslant t_i\leqslant\pi,\ i\in C_{j(k)};\ t_i\equiv 0,\ i\,\overline{\in}\, C_{j(k)}\},\ \varphi_{j(k)}(t)=\Delta^r f_{j(k)}(t),$$

где $f_{j(k)}(t)=f(t_1,\ldots,t_{j_1-1},0,t_{j_1+1},\ldots,t_{j_2-1},0,t_{j_2+1},\ldots,t_{j_k-1},0,t_{j_k+1},\ldots$ $\ldots,t_N)$,

$$D^{(2r)}_{n_{i_1}n_{i_2}\ldots n_{i_{N-k}}}(t)=(-1)^{r+1}\sum_{\substack{p_{i_\nu}\in[n_{i_\nu}+1,\infty]\\ \nu=\overline{1,N-k}}}\frac{1}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{N-k}p_{i_\nu}^2\right)^r}\prod_{\nu=1}^{N-k}\cos p_{i_\nu}t_{i_\nu}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для произвольной функции* $f(t) \in \Delta_0^r H_\omega^N$ *выполняется равенство*

$$S_n(f;0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} (-1)^{N-k-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int\limits_{R_{j(k)}} \varphi_{j(k)}(t)\, D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{N-k}}}(t)\, dt. \quad (8)$$

Доказательство. Пользуясь леммой 5[1], разложим функцию на простые, т. е. представим в виде

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} \bar{f}_{j(k)}(t), \quad (9)$$

где $\bar{f}_{j(k)}(t)$ — простые функции размерности $N-k$, удовлетворяющие соотношению $\text{Гл}(\bar{f}_{j(0)}(t)) = f(t)$, $\text{Гл}(\bar{f}_{j(k)}(t)) = f_{j(k)}(t)$.

Из доказательства леммы 5 [1] следует, что функция $\bar{f}_{j(k)}(t)$ не зависит от переменных $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k}$, поэтому, учитывая (9), нетрудно получить следующее равенство

$$S_n(f;0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int\limits_{R_{j(k)}} \bar{f}_{j(k)}(t) \prod_{i\in C_{j(k)}} D_{n_i}(t_i)\, dt. \quad (10)$$

Поскольку $\bar{f}_{j(k)}(t)$ — простая функция, то к правой части (10) можно применить лемму 1, согласно которой, с учетом (7), имеем

$$S_n(f;0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} (-1)^{N-k-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int\limits_{R_{j(k)}} \bar{\varphi}_{j(k)}(t)\, D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{N-k}}}(t)\, \mathrm{dt},$$

где $\Delta^r \bar{f}_{j(k)}(t) = \bar{\varphi}_{j(k)}(t)$.

Отметим, что ядра $D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{N-k}}}(t)$ обладают тем свойством, что $\int\limits_{R_{j(k)}} g(t)\, D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{N-k}}}(t)\, \mathrm{dt} = 0$ для любой суммируемой функции $g(t)$, размерность которой меньше $N-k$, поэтому

$$S_n(f;0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} (-1)^{N-k-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int\limits_{R_{j(k)}} \varphi_{j(k)}(t)\, D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{N-k}}}(t)\, \mathrm{dt},$$

где $\varphi_{j(k)}(t) = \text{Гл}(\bar{\varphi}_{j(k)}(t))$, чем и завершается доказательство леммы 2.

Заметим, что на основании леммы 5 [1] функция $\varphi_{j(k)}(t)$ также представима в виде

$$\varphi_{j(k)}(t) = \sum_{l=0}^{N-k-1} \sum_{m(l)\in G^l_{C_{j(k)}}} \bar{\varphi}_{j(k)m(l)}(t),$$

где $\bar{\varphi}_{j(k)m(l)}(t)$ — простые функции размерности $N-k-l$, $G^l_{C_{j(k)}}$ — множество всевозможных l-мерных целочисленных векторов $m(l) = (m_1, \dots, m_l)$, координаты которых — произвольные числа множества $C_{j(k)}$, удовлетворяющие условию $m_1 < m_2 < \dots < m_l$.

Учитывая отмеченное выше свойство ядра, $D^{(2r)}_{n_{i_1}\dots n_{i_{N-k}}}(t)$, равенство (8) можно записать так:

$$S_n(f; 0) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} (-1)^{N-k-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int_{R_{j(k)}} \psi_{j(k)}(t)\, D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2}\dots n_{i_{N-k}}}(t)\, dt, \tag{11}$$

где $\psi_{j(k)}(t) = \bar{\varphi}_{j(k)m(0)}(t)$, $\dim \psi_{j(k)}(t) = N - k$.

Введем следующие обозначения: G_q^l — множество l-мерных векторов $m(l) = (m_1, \dots, m_l)$, $l = \overline{1, q}$, координаты которых — произвольные натуральные числа, не превышающие числа q; $\bar{C}_{m(l)}$ — множество всех натуральных чисел, не превышающих q и отличных от координат вектора $m(l)$.

$$\theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, p_{m_2}, \dots, p_{m_l}} = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in\bar{C}_{m(l)}} (n_i + 1)^2 + \sum\limits_j p_j^2\right)^r}, \quad j = m_1, \dots, m_l,$$

$$\Delta^1_{p_{m_1}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}} = \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}} - \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}+1, \dots, p_{m_l}},$$

$$\Delta^2_{p_{m_1}, p_{m_1}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1} \dots p_{m_l}} = \Delta^1_{p_{m_1}} (\Delta^1_{p_{m_1}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}}),$$

$$\Delta^3_{p_{m_1} p_{m_1} p_{m_2}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}} = \Delta^1_{p_{m_2}} (\Delta^2_{p_{m_1} p_{m_1}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^{2l}_{p_{m_1} p_{m_1} \dots p_{m_l} p_{m_l}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \dots, p_{m_l}} = \Delta_{p_{m_l}} (\Delta^{2l-1}_{p_{m_1} p_{m_1} \dots p_{m_{l-1}} p_{m_l}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1} \dots p_{m_l}}).$$

Лемма 3. *Для ядра $D^{(2r)}_{n_1 n_2 \dots n_q}(t)$ имеет место представление*

$$D^{(2r)}_{n_1 n_2 \dots n_q}(t) = \frac{(-1)^{r+1} (-1)^q \prod\limits_{i=1}^{q} D_{n_i}(t_i)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{q} (n_i + 1)^2\right)^r} + (-1)^{r+1} \sum_{l=1}^{q} (-1)^{q-l} \times$$

$$\times \sum_{m(l)\in G_q^l} \prod_{i\in\bar{C}_{m(l)}} D_{n_i}(t_i) \sum_{p_j\in[n_j+1, \infty]} \Delta^{2l}_{p_{m_1} p_{m_1} \dots p_{m_l} p_{m_l}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1} \dots p_{m_l}} \times$$

$$\times \prod_j ((p_j + 1)\,\mathfrak{F}_{p_j}(t_j) - (n_j + 1)\,\mathfrak{F}_{n_j}(t_j)), \quad j = m_1, \dots, m_l. \tag{12}$$

Доказательство этой леммы проводится методом математической индукции по q с использованием равенства

$$D^{(2r)}_{n_1}(t_1) = (-1)^{r+1}\left(-\frac{D_{n_1}(t_1)}{(n_1 + 1)^{2r}} + \sum_{p_1=n_1+1}^{\infty} \Delta^2_{p_1 p_1} \theta^{(r)}_{p_1} ((p_1 + 1)\,\mathfrak{F}_{p_1}(t_1) - \right.$$

$$\left. - (n_1 + 1)\,\mathfrak{F}_{n_1}(t_1)\right),$$

легко получаемого, если дважды воспользоваться преобразованием Абеля.

Л е м м а 4. *Какова бы ни была функция* $f(t) \in \Delta_0^r H_\omega^N$, *имеет место асимптотическое равенство*

$$S_n(f;0) = (-1)^r \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k) \in G_N^k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i \in C_{j(k)}} (n_i+1)^2\right)^r} \int\limits_{R_{j(k)}} \psi_{j(k)}(t) \times$$

$$\times \prod_{i \in C_{j(k)}} D_{n_i}(t_i)\, dt + O(\gamma_n), \tag{13}$$

где

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k) \in G_N^k} \min_{i \in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i \in C_{j(k)}} n_i^2\right)^r} \sum_{\nu \in C_{j(k)}} \prod_{\substack{i \in C_{j(k)} \\ i \neq \nu}} \ln n_i. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (11), учитывая представление для ядра $D^{(2r)}_{n_{i_1} n_{i_2} \ldots n_{i_{N-k}}}(t)$, полученное в лемме 3, находим

$$S_n(f;0) = (-1)^r \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k) \in G_N^k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i \in C_{j(k)}} (n_i+1)^2\right)^r} \int\limits_{R_{j(k)}} \psi_{j(k)}(t) \times$$

$$\times \prod_{i \in C_{j(k)}} D_{n_i}(t_i)\, dt + \beta_n,$$

где

$$\beta_n = (-1)^r \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k) \in G_N^k} (-1)^{N-k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \int\limits_{R_{j(k)}} \psi_{j(k)}(t) \sum_{l=1}^{N-k} (-1)^{N-k-l} \times$$

$$\times \sum_{m(l) \in G^l_{C_{j(k)}}} \prod_{i \in \overline{C}_{m(l)}} D_{n_i}(t_i) \sum_{\substack{p_j \in [n_j+1, \infty] \\ j = m_1, \ldots, m_l}} \Delta^{2l}_{p_{m_1} p_{m_1} \ldots p_{m_l} p_{m_l}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1}, \ldots, p_{m_l}} \prod_j ((p_j+1) \mathfrak{F}_{p_j}(t_j) -$$

$$- (n_j+1) \mathfrak{F}_{n_j}(t_j))\, dt = (-1)^r \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k) \in G_N^k} (-1)^{N-k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{N-k} (-1)^{N-k-l} \sum_{m(l) \in G^l_{C_{j(k)}}} \mathfrak{I}_{j(k) m(l)}(\psi). \tag{15}$$

Используя для оценки кратных интегралов $\mathfrak{I}_{j(k)m(l)}(\psi)$ лемму 3 [1], после несложных преобразований получим

$$|\mathfrak{I}_{j(k)m(l)}(\psi)| \leqslant \sum_{\substack{p_j \in [n_j+1, \infty] \\ j = m_1, \ldots, m_l}} |\Delta^{2l}_{p_{m_1} p_{m_1} \ldots p_{m_l} p_{m_l}} \theta^{(r)}_{n, p_{m_1} \ldots p_{m_l}}| \times$$

$$\times \prod_j p_j \min_{i \in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \prod_{i \in \overline{C}_{m(l)}} \ln n_i. \tag{16}$$

Справедливо неравенство

$$|\Delta^{2l}_{p_{m_1}p_{m_1}\dots p_{m_l}p_{m_l}}\theta^{(r)}_{n,p_{m_1},\dots,p_{m_l}}| \leqslant \frac{C}{\left(\sum\limits_{i\in\overline{C}_{m(l)}}(n_i+1)^2+\sum p_j^2\right)^{r+l}}, \quad j=m_1,\dots,m_l,$$

благодаря которому из (16) для $\mathfrak{J}_{j(k)m(l)}$ (ψ) получим следующее выражение

$$\mathfrak{J}_{j(k)m(l)}(\psi) = O\left[\min_{i\in C_{j(k)}}\left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\}\prod_{i\in\overline{C}_{m(l)}}\ln n_i\,\frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}} n_i^2\right)^r}\right]. \tag{17}$$

Из соотношений (15) и (17) получаем

$$|\beta_n| = O\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j(k)\in G_N^k}\min_{i\in\overline{C}_{j(k)}}\left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\}\frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}} n_i^2\right)^r}\sum_{l=1}^{N-k}\sum_{m(l)\in G^l_{C_{j(k)}}}\prod_{i\in\overline{C}_{m(l)}}\ln n_i.\right. \tag{18}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\sum_{l=1}^{N-k}\sum_{m(l)\in G^l_{C_{j(k)}}}\prod_{i\in\overline{C}_{m(l)}}\ln n_i = O\left(\sum_{\nu\in\overline{C}_{j(k)}}\prod_{\substack{i\in C_{j(k)}\\ i\neq\nu}}\ln n_i\right),$$

поэтому из (18) следует, что $|\beta_n| = O(\gamma_n)$. Этим лемма 4 доказана.

Пусть $x^i_{p_i} = \dfrac{2\pi p_i}{2n_i+1}$ — нули ядра D_{n_i}, $t^i_{p_i} = \dfrac{\pi(2p_i+1)}{2n_i+1}$, $p_i = \overline{0, n_i}$,

$$d^0_{n_i}(t_i) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{2n_i+1}{2}t_i}{2\sin\dfrac{x^i_{p_i}+1}{2}}, & \text{если } t_i\in[t^i_{p_i},\ t^i_{p_i+1}],\quad p_i=\overline{0, n_i-1},\\[2ex] 0, & \text{если } t_i\in[0,\ t^i_0],\qquad i=\overline{1, N}.\end{cases}$$

Согласно лемме 7 [1] соотношение (13) можно представить в виде

$$S_n(f;0) = (-1)^r\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j(k)\in G_N^k}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k}\frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}}(n_i+1)^2\right)^r}\int\limits_{R_{j(k)}}\varphi(t)\times$$
$$\times\prod_{i\in C_{j(k)}} d^0_{n_i}(t_i)\,dt + O(\gamma_n). \tag{19}$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(t)\in H^N_\omega$, и проводя рассуждения, посредством которых была получена оценка (4.25) в [1], находим

$$|S_n(f;0)| \leqslant \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j(k)\in G_N^k}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}}(n_i+1)^2\right)^r}\prod_{i\in C_{j(k)}}\ln n_i\times$$
$$\times\int\limits_{R^{j(k)}_{\pi/2}}\min_{i\in C_{j(k)}}\left\{\omega_i\left(\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\}\prod_{i\in C_{j(k)}}\sin t_i dt + O(\gamma_n), \tag{20}$$

где $R^{j(k)}_{\pi/2} = [t: 0\leqslant t_i\leqslant\pi/2,\ i\in C_{j(k)},\ t_i\equiv 0,\ i\,\overline{\in}\,C_{j(k)}]$.

Наконец, покажем, что если $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$ — выпуклые функции, то неравенство (20) обращается в равенство.

В самом деле, обозначим через $F^*(t)$ функцию, для которой $\Delta^r F^*(t) = f^*(t)$, $F^*(0) = 0$, где $f^*(t)$ — функция, построенная в [1] (см. (5.35)).

Тогда, с одной стороны, $F^*(t) \in \Delta_0^r H_\omega^N$, с другой, согласно (9)

$$|S_n(F^*; 0)| = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N-k} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}} (n_i+1)^2\right)^r} \int\limits_{R_{j(k)}} F^*(t) \times$$

$$\times \prod_{i\in C_{j(k)}} d_{n_i}^0(t_i)\, dt + O(\gamma_n). \tag{21}$$

Из соотношений (5.53—5.56) работы [1] следует, что правые части (20) и (21) равны.

Резюмируем изложенное выше в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а. *При произвольном возрастании натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$ и любых модулях непрерывности $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$, имеет место оценка*

$$\mathcal{E}_n^N(\omega) \leqslant \frac{2^{2N-1}}{\pi^{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}} (n_i+1)^2\right)^r} \sum_{\nu\in C_{j(k)}} \prod_{\in C_{j(k)}} \ln n_i \times$$

$$\times \int\limits_{R_{\pi/2}^{j(k)}} \min\left\{\omega_i\left(\frac{4t_i}{2n_i+1}\right)\right\} \prod_{i\in C_{j(k)}} \sin t_i\, dt + O[\gamma_n], \tag{22}$$

где

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j(k)\in G_N^k} \min_{i\in C_{j(k)}} \left\{\omega_i\left(\frac{1}{n_i}\right)\right\} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i\in C_{j(k)}} n_i^2\right)^r} \sum_{\nu\in C_{j(k)}} \prod_{\substack{i\in C_{j(k)}\\ i\neq\nu}} \ln n_i.$$

В случае, когда $\omega_i(t_i)$, $i = \overline{1, N}$ — выпуклые функции, соотношение (22) обращается в равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье непрерывных периодических функций многих переменных.: Препринт 77.2, Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977.— — 46 с.
2. Задерей Н. Н., Степанец А. И. Приближение суммами Фурье на классах периодических функций, определяемых полигармоническими операторами.— Мат. заметки, 1980, 27, № 3, с.49—59.
3. Бугров Я. С. Приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых полигармоническими операторами.— Успехи мат. наук, 1958, 13, № 2, с. 149—156.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
21.IX 1978 г.