УДК 519.21

М. Е. Зюков

Принцип инвариантности для процессов с независимыми приращениями, подчиненных условию положительности

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P^x) задан однородный сепарабельный, стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями ξ_t, $t \geqslant 0$, у которого отсутствуют отрицательные скачки. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $M^x(\xi(1) - \xi(0)) = 0$, $M^x(\xi(1) = \xi(0))^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$.

Если процесс выходит из положительного состояния, то для $n \geqslant 1$ полагаем $A_n = \{\xi(t) > 0,\ t \leqslant n\}$ и обозначаем $(A_n,\ A_n \cap F,\ P_n^x)$ след (Ω, F, P^x) на A_n, $P_n^x(B) = P^x(B/A_n)$, где $B \in A_n \cap F$.

Введем последовательность случайных функций

$$X_n(t) = \frac{\xi(nt)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad n \geqslant 1,$$

со значениями в $D[0, 1]$ — пространство действительных, непрерывных справа функций на $[0, 1]$, имеющих предел слева.

Пусть X_n^+ — сужение X_n на A_n, т. е. $X_n^+(\cdot, \omega) = X_n(\cdot, \omega)$, $\omega \in A_n$, а W^+ — так называемая броуновская извилина. В работе [1] показано, что W^+ — непрерывный с вероятностью 1 марковский процесс на $[0, 1]$, плотности переходных вероятностей которого задаются соотношениями

$$p(0, 0;\ t, x) = xt^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{2t}} N\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$$

для $0 < t \leqslant 1$, $x > 0$ и

$$p(t_1, x_1;\ t_2, x_2) = \frac{N\left(\frac{x_2}{\sqrt{1-t_2}}\right)}{N\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-t_1}}\right)} g(t_2 - t_1, x_1, x_2)$$

для $0 < t_1 < t_2 \leqslant 1$, $x_1, x_2 > 0$, где $g(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right)$,

а $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

Сохраним для вероятностной меры на $C[0, 1]$, соответствующей W^+, то же обозначение, а ее конечномерные распределения обозначим через $W^+_{t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k)$, $k \geqslant 1$, $0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$, $x_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Основной результат данной работы состоит в том, что для любого $x > 0$ последовательность вероятностных мер $P_n^x(X_n^+)^{-1}$ на $D[0, 1]$, соответствующих случайным функциям X_n^+, слабо сходится к мере W^+ при $n \to \infty$.

Аналогичные результаты для случайных блужданий и сложного пуассоновского процесса со сносом получены в работах [1—3].

2. Сходимость конечномерных распределений. Для ссылок приведем следствие теоремы 2.7 работы [4].

Лемма 1. *Пусть* $M^x(\xi(1) - \xi(0)) = 0$, $M^x(\xi(1) - \xi(0))^2 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, *тогда для любого* x $P^x X_n^{-1} \Rightarrow W$, *где* W — *винеровская мера, а знак* $\Rightarrow$ *означает слабую сходимость мер.*

Обозначим $\eta = \sup\{t : \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} \xi(s) > 0\}$, $r_t = P^x\{\eta > t\}$.

Л е м м а 2 (см. [5]). *В условиях леммы* 1 *для любого* $x>0$ 1) $r_t \sim ct^{-1/2}$ *при* $t\to\infty$, 2) $\lim\limits_{t\to\infty} P^x\left\{\frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}} \leqslant y/\eta>t\right\} = 1-e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y\geqslant 0$.

Пусть $T_n = \sup\{t\leqslant 1 : \inf\limits_{s\leqslant t} X_n(s)>0\}$. Тогда, используя лемму 1, можно показать, как это делалось в [1] для целочисленных случайных блужданий, что имеет место следующая лемма.

Л е м м а 3. *В условиях леммы* 1 *для всех* y, $z>0$, $0<t\leqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} P^{y\sigma\sqrt{n}}\{X_n(t)\leqslant z,\ T_n>t\} = \int\limits_0^z g(t, y, x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{y\sigma\sqrt{n}}\{T_n>t\} = 2N\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right),$$

причем сходимость равномерна по y *на компактных множествах.*

Для доказательства сходимости конечномерных распределений нам понадобится лемма, являющаяся следствием теоремы 5.5 работы [6] (см. также [7 с. 532]).

Л е м м а 4. *Пусть* $\{\mu_n,\ n\geqslant 1\}$ — *последовательность конечных мер на* σ-*алгебре* $\mathfrak{B}$ *борелевских множеств на прямой. Предположим, что* $\mu_n \Rightarrow \mu$ (μ — *конечная мера*). *Если* $\{f_n,\ n\geqslant 1\}$ — *последовательность равномерно ограниченных, измеримых по Борелю функций, равномерно сходящихся на компактных множествах к ограниченной непрерывной функции* f, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B f_n(x)\,\mu_n(dx) = \int\limits_B f(x)\,\mu(dx)$ *для всех* $B\in\mathfrak{B}$ *таких, что* $\mu(\partial B) = 0$.

Докажем основной результат этого раздела.

Т е о р е м а 1. *В условиях леммы 1 для всех* $x>0$, $k\geqslant 1$, $x_1,\ldots, x_k>0$, $0<t_1<\ldots<t_k\leqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} P_n^x\{X_n^+(t_i)\leqslant x_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\} = W^+_{t_1,\ldots,t_k}(x_1,\ldots,x_k). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по индукции. Для $k=1$, $t=1$ утверждение теоремы следует из леммы 2, а при $0<t<1$, используя леммы 2—4, имеем

$$\lim_{n\to\infty} P_n^x\{X_n^+(t)\leqslant y\} = \lim_{n\to\infty}\frac{r_{nt}}{r_n}\int\limits_{0+}^{y} P_{nt}^x\left\{X_{nt}^+(1)\in\frac{dz}{\sqrt{t}}\right\} P^{z\sigma\sqrt{n}}\{T_n>1-t\} = W_t^+(y).$$

Предположим, что (1) имеет место при $k=m$. Тогда, выполняя очевидные преобразования, дважды используя леммы 3, 4 и учитывая предположение индукции, получаем

$$\lim_{n\to\infty} P_n^x\{X_n^+(t_i)\leqslant x_i,\ 1\leqslant i\leqslant m+1\} = \lim_{n\to\infty}\frac{r_{nt_m}}{r_n}\int\limits_{0+}^{x_m}\int\limits_{0+}^{x_{m+1}} P_{nt_m}^x\left\{X_{nt_m}^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right)\leqslant\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{x_1}{\sqrt{t_m}},\ldots, X_{nt_m}^+\left(\frac{t_{m-1}}{t_m}\right)\leqslant\frac{x_{m-1}}{\sqrt{t_m}},\quad X_{nt_m}^+(1)\in\frac{dy_m}{\sqrt{t_m}}\right\} P^{y_m\sigma\sqrt{n}}\{X_n(t_{m+1}-$$

$$-t_m)\in dy_{m+1},\ T_n>t_{m+1}-t_m\} P^{y_{m+1}\sigma\sqrt{n}}\{T_n>1-t_{m+1}\} = W^+_{t_1,\ldots,t_{m+1}}(x_1,\ldots, x_{m+1}.$$

3. С л а б а я с х о д и м о с т ь в $D[0, 1]$. Определим модуль непрерывности для функций $x\in D$, положив $\omega_x(\delta, a, b) = \sup|x(s)-x(t)|$, где $0\leqslant a<b\leqslant 1$, $0<\delta<1$. Верхняя грань берется по всем s и t таким, что $a\leqslant s\leqslant t\leqslant b$ и $t-s\leqslant\delta$.

Если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P_n^x \{\omega_{X_n^+}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon\} = 0, \qquad (2)$$

то в силу теоремы 1, а также теорем 15.1 и 15.5 из [6], докажем, что $P_n^x(X_n^+)^{-1} \Rightarrow W^+$.

Для проверки соотношения (2) используем следующую лемму, доказательство которой опирается на рассуждения, приведенные в [1] для целочисленных случайных блужданий.

Лемма 5. *В условиях леммы 1 для любых $x > 0$, $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} r_n^{-1} P^x \{\sup_{t\leqslant\delta} X_n(t) \geqslant \varepsilon,\ T_n > \delta\} = 0.$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. *В условиях леммы 1 для любого $x > 0$*

$$P_n^x (X_n^+)^{-1} \Rightarrow W^+.$$

Как отмечалось выше, для доказательства теоремы достаточно показать, что выполняется соотношение (2). Для любого $\varepsilon > 0$, $0 < \tau \leqslant 1$ и $0 < \delta < \tau$ имеем очевидные оценки

$$P_n^x\{\omega_{X_n^+}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon\} \leqslant r_n^{-1} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon,\ T_n > \tau\} \leqslant$$
$$\leqslant r_n^{-1} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon,\ \sup_{t\leqslant\tau} X_n(t) < \varepsilon,\ T_n > \tau\} +$$
$$+ r_n^{-1} P^x \{\sup_{t\leqslant\tau} X_n(t) \geqslant \varepsilon,\ T_n > \tau\}.$$

Так как $X_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — случайный процесс с независимыми приращениями, то

$$r_n^{-1} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon,\ \sup_{t\leqslant\tau} X_n(t) < \varepsilon,\ T_n > \tau\} \leqslant r_n^{-1} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, \tau -$$
$$- \delta, 1) \geqslant \varepsilon,\ T_n > \tau - \delta\} \leqslant \frac{r_{n(\tau-\delta)}}{r_n} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon\}.$$

Из леммы 1 и леммы 3 работы [8] следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P^x \{\omega_{X_n}(\delta, 0, 1) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Тогда ввиду произвольности $\tau > 0$ и леммы 5 имеет место (2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belkin B. An invariance principle for conditioned random walk attracted to stable law.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 1972, **21**, p. 45—64.
2. Iglehart D. L. Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive.— Ann. Prob., 1974, **2**, p. 608—619.
3. Kennedy D. P. Limiting diffusions for the conditioned M|G|1 queune.— J. Appl. Prob., 1974, **11**, p. 355—362.
4. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее применения, 1957, **2**, с. 145—177.
5. Печинкин А. В. Некоторые предельные распределения для процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, **23**, с. 179—186.
6. Биллинсгли П. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.— М. Наука, 1977.— 568 с.
8. Iglehart D. L., Whitt W. The equivalence of functional central limit theorems for counting processes and assosiated partial sums.— Ann. Math. Stat., 1971, **42**, p. 1372—1378.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.VI 1979 г.