УДК 517.9

|Н. С. Курпель|, А. Г. Марусяк

Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами

В настоящей статье исследуется следующая краевая задача. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t, x, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(m)}\right), \tag{1}$$

содержащего m параметров $\lambda^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, ищется значение параметров $\lambda^{(i)}$ и решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} x(0)=x(t_0)&=x^{(0)},\\ x(t_1)&=x^{(1)},\\ x(t_2)&=x^{(2)},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x(T)=x(t_m)&=x^{(m)}=x^{(T)}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $t\in[0:T]$, $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_m=T$, $\lambda^{(i)}\in R_1$ $(i=1,2,\ldots,m)$, $x(t)\in C_{[0;T]}$.

При $m=1$ эта задача переходит в краевую задачу с параметром, которая была предметом исследований ряда авторов [1—7].

Установим достаточные условия существования и единственности решения задачи (1)—(2), а также укажем процесс последовательных приближений, сходящихся к решению рассматриваемой задачи, и приведем оценку погрешности n-го приближения.

Положим

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda^{(1)}\\ \lambda^{(2)}\\ \vdots\\ \lambda^{(m)}\end{pmatrix},$$

$$y=(x;\ \lambda),\quad \|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|,\quad \|\lambda\|=\max_{(i=1,2,\ldots,m)}|\lambda^{(i)}|,\quad \|y\|=\max\{\|x\|,\ \|\lambda\|\},$$

$$B=(B_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ j=1,2,\ldots,m}},\qquad C(y)=C(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\int\limits_0^{t_1} f(s, x(s), \lambda)\,ds-x^{(1)}+x^{(0)}\\ \int\limits_0^{t_2} f(s, x(s), \lambda)\,ds-x^{(2)}+x^{(0)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int\limits_0^{t_m} f(s, x(s), \lambda)\,ds-x^{(m)}+x^{(0)}\end{pmatrix}.$$

Пусть выполнены следующие условия.

1. Функция $f(t, x, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(m)})$ определена и непрерывна по совокупности переменных в области $S=\{[0;T];\ \|x-x^{(0)}\|\leqslant R;\ \underset{1\leqslant i\leqslant m}{|\lambda^{(i)}|}\leqslant\rho\}$ и ограничен интеграл

$$\int\limits_0^T\|f(s, x(s), \lambda)\|\,ds\leqslant R. \tag{3}$$

Кроме того, она удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x, \lambda) - f(t, \bar{x}, \bar{\lambda})| \leqslant \alpha(t)|x - \bar{x}| + \beta(t)\|\lambda - \bar{\lambda}\|. \tag{4}$$

2. Существуют неособенная матрица B и матрица столбец $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$ такие, что в S выполняются условия

$$\left|\int_0^{t_i} [f(s, x(s), \lambda) - f(s, x(s), \bar{\lambda})]\, ds - \sum_{j=1}^{m} B_{ij}(\lambda^{(j)} - \bar{\lambda}^{(j)})\right| \leqslant \varepsilon \|\lambda - \bar{\lambda}\|, \tag{5}$$

$$\left|\int_0^{t_i} [f(s, x(s), \lambda) - f(s, \bar{x}(s), \lambda)]\, ds\right| \leqslant d_i\, (x - \bar{x}| \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

$$\varepsilon, \lambda - \mathrm{const}.$$

Задача (1)—(2) сводится к решению следующей системы уравнений порядка $m + 1$:

$$\begin{gathered} x(t) = x^{(0)} + \int_0^t f(s, x(s), \lambda)\, ds \\ \int_0^{t_1} f(s, x(s), \lambda)\, ds = x^{(1)} - x^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^{t_m} f(s, x(s), \lambda)\, ds = x^{(m)} - x^{(0)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для приближенного решения задачи (1)—(2) или системы (7) находим последовательные приближения по алгоритму

$$x_{n+1}(t) = x^{(0)} + \int_0^t f(s, x_n(s), \lambda_n)\, ds, \tag{8}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - B^{-1} C(x_n, \lambda_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где $x_0(t)$ — непрерывная функция на $[0; T]$ и $\|x_0(t) - x^{(0)}\| \leqslant R$, $\|\lambda_0\| = \max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)} |\lambda_0^{(i)}| \leqslant \rho$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1—2, *а краевые условия* (2) *и* ε, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *такие, что выполняются неравенства*

$$q = \max\left\{\int_0^T \alpha(s)\, ds + \int_0^T \beta(s)\, ds;\quad \|B^{-1}\|(\varepsilon + \max_{(i=1,2,\ldots,m)} d_i)\right\} < 1, \tag{10}$$

$$\|B^{-1}\| K \leqslant (1 - \varepsilon\|B^{-1}\|)\rho, \tag{11}$$

где $K = \max\limits_{(i=1,\ldots,m)} \left|\int_0^{t_i} f(s, x(s), 0)\, ds - X^{(i)} + x^{(0)}\right|$, $\|x(s) - x^{(0)}\| \leqslant R$.

Тогда последовательные приближения $(x_n(t); \lambda_n)$, *полученные из* (8)—(9), *сходятся к единственному решению* $(x^*(t); \lambda^*)$ *задачи* (1)—(2) *с оценкой погрешности*

$$\|y^* - y_n\| \leqslant \frac{q^n}{1 - q}\, \delta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $\delta = \max\{\|x_1(t) - x_0(t)\|;\ \|\lambda_1 - \lambda_0\|\}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$A(y)=A(x,\lambda)=\begin{pmatrix} x^{(0)}+\int\limits_0^t f(s,x(s),\lambda)\,ds \\ \lambda-B^{-1}C(x,\lambda)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Пусть $\|x(t)-x^{(0)}\|\leqslant R$ и $\|\lambda\|=\max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)}|\lambda^{(i)}|\leqslant\rho$.

Используя (8), (9), (5), (11) и (3), можно показать, что оператор A переводит элементы области S в элементы этой же области. Действительно имеем

$$\|\lambda-B^{-1}C(x,\lambda)\|\leqslant\|B^{-1}\|\,\|B\lambda-[C(x,\lambda)-C(x,0)+C(x,0)]\|\leqslant$$

$$\leqslant\|B^{-1}\|(\varepsilon\|\lambda\|+K)\leqslant\|B^{-1}\|\varepsilon\rho+(1-\varepsilon\|B^{-1}\|)\rho=\rho,$$

$$\left\|\int\limits_0^t f(s,x(s),\lambda)\,ds\right\|\leqslant\int\limits_0^T\|f(s,x(s),\lambda)\|\,ds\leqslant R,$$

т. е. $Ay\in S$.

Покажем, что оператор A — оператор сжатия. Имеем

$$A(y)-A(\bar y)=\begin{pmatrix}\int\limits_0^t[f(s,x(s),\lambda)-f(s,\bar x(s),\bar\lambda)]\,ds \\ B^{-1}\{B(\lambda-\bar\lambda)-[C(x,\lambda)-C(\bar x,\bar\lambda)]\}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует равенство

$$\|A(y)-A(\bar y)\|=\max\left\{\left\|\int\limits_0^t[f(s,x(s),\lambda)-f(s,\bar x(s),\bar\lambda)]\,ds\right\|;\right.$$

$$\left.\|B^{-1}\|\,\|B(\lambda-\bar\lambda)-[C(x,\lambda)-C(\bar x,\bar\lambda)]\|\right\}. \tag{14}$$

Оценим отдельно каждую норму в фигурных скобках правой части равенства (14). Находим

$$\left\|\int\limits_0^t[f(s,x(s),\lambda)-f(s,\bar x(s),\bar\lambda)]\,ds\right\|\leqslant\left\|\int\limits_0^t|f(s,x(s),\lambda)-f(s,\bar x(s),\bar\lambda)|\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^t|x-\bar x|\,\alpha(s)\,ds+\|\lambda-\bar\lambda\|\int\limits_0^t\beta(s)\,ds\right\|\leqslant\|x-\bar x\|\int\limits_0^T\alpha(s)\,ds+$$

$$+\|\lambda-\bar\lambda\|\int\limits_0^T\beta(s)\,ds. \tag{15}$$

Применяя (5) — (6), получаем

$$\|B^{-1}\|\,\|B(\lambda-\bar\lambda)-[C(x,\lambda)-C(\bar x,\bar\lambda)]\|\leqslant\|B^{-1}\|\,\|B(\lambda-\bar\lambda)-[C(x,\lambda)-$$

$$-C(x,\bar\lambda)]\|+\|B^{-1}\|\,\|C(x,\bar\lambda)-C(\bar x,\bar\lambda)\|\leqslant$$

$$\leqslant\|B^{-1}\|(\varepsilon\|\lambda-\bar\lambda\|+\|x-\bar x\|\max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)}d_i). \tag{16}$$

Подставляя оценки (15)—(16) в формулу (14), приходим к неравенству

$$\|A(y)-A(\bar y)\|\leqslant\max\left\{\|x-\bar x\|\int\limits_0^T\alpha(s)\,ds+\|\lambda-\bar\lambda\|\int\limits_0^T\beta(s)\,ds;\right.$$

$$\left.\|B^{-1}\|(\varepsilon\|\lambda-\bar\lambda\|+\|x-\bar x\|\max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)}d_i)\right\}.$$

Принимая во внимание определение $\|y\|$, окончательно получаем $\|A(y) - A(\bar{y})\| \leqslant q \|y - \bar{y}\|$.

Так как по условию (10) $q < 1$, то оператор A удовлетворяет всем условиям принципа сжимающих отображений. Следовательно, он имеет единственную неподвижную точку $(x^*(t); \lambda^*)$ в S, которая, как легко убедиться, будет решением задачи (1)—(2) или системы (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zawischa K. Uber die Differentialgleichung $y' = kf(x, y)$ deren Zösungskurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll.— Monatsch. Math. Phys., 1930, **37**, № 5, S. 103—124.
2. Кибенко А. В. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче для уравнения с параметром.— Уч. записки. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. и хим. наук, 1961, № 6, с. 13—21.
3. Кибенко А. В., Перов А. И. Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром.— Труды семинара по функциональному анализу Воронежского ун-та, 1963, вып. 7, с. 52—58.
4. Сеидов З. Б. Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— Сиб. мат. журн., 1968, **9**, № 1, с. 223—228.
5. Сеидов З. Б. Краевая задача с параметром для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Укр. мат журн., **28**, № 5, с. 671—677.
6. Pomentale T. A constructive theorem of existence and unigueness for the problem $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.— Z. angew. Math. Mech., 1976, **56**, № 8, p. 387—388.
7. Гома И. А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром.— Укр. мат. журн., **1977**, **29**, № 6, с. 800—806.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
2.X 1978 г.