УДК 517.956.226

В. А. Маловичко

О первой краевой задаче для одного класса уравнений с неотрицательной характеристической формой

Пусть Ω — некоторая ограниченная область в n-мерном пространстве R^n с кусочно гладкой границей Γ. В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = f(x), \tag{1}$$

где $m < n$, $\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant 0$ для всех точек $x \in \Omega$ и любого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Уравнение (1) принадлежит классу уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой, которые изучались во многих работах (см., например, [1, 2]). В свою очередь, оно является обобщением уравнений ультрапараболического типа, изучавшихся в многочисленных работах (см. [3—6] и др.).

Пусть $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$ — единичная внешняя нормаль к границе Γ в точке $x \in \Gamma$. Разобьем границу Γ на части Γ_1, Γ_2, Γ_3 следующим образом. Через Γ_3 обозначим нехарактеристическую часть границы Γ, т. е. Γ_3 — множество точек $x \in \Gamma$, для которых выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\, l_i(x)\, l_j(x) > 0. \tag{2}$$

Через Γ_2 обозначим часть границы Γ, на которой выполняется равенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\, l_i(x)\, l_j(x) = 0 \tag{3}$$

и функция

$$b(x) = \sum_{i=1}^{n} b^{i}(x)\, l_i(x) - \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_j}(x)\, l_i(x) \tag{4}$$

положительна. Наконец $\Gamma_1 = \Gamma \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)$.

Множество $\tilde{\Gamma} = \Gamma_2 \cup \Gamma_1$ будем называть регулярной частью границы Γ.

Настоящая работа посвящена изучению условий существования и единственности некоторых обобщенных решений задачи

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \tilde{\Gamma}. \tag{6}$$

Далее, специально не оговаривая, будем считать выполненными следующие условия:

1) $a^{ij}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$ вместе с производными вида $a^{ij}_{x_i}$, $a^{ij}_{x_j}$, $a^{ij}_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$;

2) $b^{i}(x)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ вместе с производными вида $b^{i}_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$;

3) $c(x)$ непрерывно в $\bar{\Omega}$.

Введем следующие определения. $C^{2,1}(\bar{\Omega})$ — пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций, имеющих непрерывные в $\bar{\Omega}$ производные до второго порядка включительно по первым m переменным и непрерывные в $\bar{\Omega}$ производные первого порядка по остальным $(n-m)$ переменным; $W_2^{2,1}(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из всех элементов пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные u_{x_k}, $k = 1, \ldots, n$, $u_{x_i x_j}$, $i, j = 1, \ldots, m$ из $L_2(\Omega)$; $W^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)$ — замыкание по норме

$$\| u \|_{W^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

функций $u(x) \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\Gamma_0 \subset \Gamma$, где пространство $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ определяется аналогично пространству $C^{2,1}(\bar{\Omega})$, $W^{-1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)$—негативное пространство, построенное по $L_2(\Omega)$ и $W^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)$; $W^{2,1}_{\Gamma_0}(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все функции пространства $C^{2,1}(\bar{\Omega})$, обращающиеся в нуль на Γ_0; L^* — оператор, формально сопряженный с оператором L, т. е.

$$L^*v(x) = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\, v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^{*i}(x)\, v_{x_i} + c^*(x)\, v, \tag{7}$$

где $b^{*i} = \sum_{j=1}^{m} (a^{ij}_{x_j} + a^{ji}_{x_j}) - b^{i}$, $i = 1, \ldots, m$; $b^{*i} = -b^{i}$, $i = m+1, \ldots, n$;

$c^* = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} b^{i}_{x_i} + c.$

Задачу

$$L^*v(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \tilde{\Gamma}^*, \tag{9}$$

где $\tilde{\Gamma}^*$ — построенная для оператора L^* регулярная часть границы Γ, назовем сопряженной с задачей (5), (6).

Лемма 1. *Если существует функция* $\omega = \omega(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$ *такая, что*

$$\omega < 0, \quad (c + c^*)\,\omega - \sum_{i=m+1}^{n} b^i \omega_{x_i} > 0 \text{ в } \overline{\Omega}, \tag{10}$$

то справедливо энергетическое неравенство

$$\| Lu \|_{W^{-1,0}_{\Gamma_3}(\Omega)} \geqslant \alpha \| u \|_{W^{1,0}_{\Gamma_3}(\Omega)}, \ \forall u \in W^{2,1}_{\tilde{\Gamma}}(\Omega) \cap W^{1,0}_{\Gamma_3}(\Omega), \tag{11}$$

где α *— некоторая положительная постоянная, не зависящая от* u.

Доказательство. Пусть функция $\omega(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию (10) и пусть $u(x) \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$ — некоторая функция, обращающаяся в нуль на $\tilde{\Gamma}$. Интегрируя по частям выражение $2\omega u L u$, получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 2\omega u L u\, dx &= \int_{\Gamma} 2\omega u \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} u_{x_i} l_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2\omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx - \\
&- \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} (u^2)_{x_i} \omega_{x_j} \right] dx - \int_{\Omega} \omega \left[\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_j} (u^2)_{x_i} \right] dx + \int_{\Omega} \omega \left[\sum_{i=1}^{n} b^i (u^2)_{x_i} \right] dx + \\
&+ \int_{\Omega} 2\omega c u^2 dx = \int_{\Gamma} 2\omega u \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} u_{x_i} l_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2\omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx - \\
&- \int_{\Gamma} u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} \omega_{x_j} l_i \right) d\Gamma + \int_{\Omega} u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_i} \omega_{x_j} \right) dx + \int_{\Omega} u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} \omega_{x_i x_j} \right) dx - \\
&- \int_{\Gamma} \omega u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_j} l_i \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \omega u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_i x_j} \right) dx + \int_{\Omega} u^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}_{x_j} \omega_{x_i} \right) dx + \\
&+ \int_{\Gamma} \omega u^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b^i l_i \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \omega u^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i} \right) dx - \\
&- \int_{\Omega} u^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b^i \omega_{x_i} \right) dx + \int_{\Omega} 2\omega c u^2 dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{m} a^{ij}(x)\, l_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ j = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

В самом деле, функция

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} \xi_i \xi_j$$

при фиксированном $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и любых действительных $\xi_1, \ldots, \xi_m$ неотрицательна, а при $\xi_i = l_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, обращается в нуль, т. е. достигает минимума. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(l_1, \ldots, l_m) = \sum_{i=1}^{m} a^{ij}(x)\, l_i(x) = 0.$$

Учитывая (13) и свойства функций u и ω, перепишем (12) в виде

$$\int_\Omega 2\omega u L u dx = -\int_\Omega 2\omega \left(\sum_{i,j=1}^m a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right) dx + \int_\Omega u^2 \Big[(c + c^*)\,\omega - $$

$$- \sum_{i=m+1}^n b^i \omega_{x_i} \Big] dx + \int_{\Gamma_1} b(x)\,\omega u^2 d\Gamma. \tag{14}$$

Так как $b(x) \leqslant 0$ на Γ_1, то из равенства (14) следует неравенство (11).

Лемма 2. *Если существует функция* $\omega^* = \omega^*(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ *такая, что*

$$\omega^* < 0, \quad (c + c^*)\,\omega^* + \sum_{i=m+1}^n b^i \omega^*_{x_i} > 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \tag{15}$$

то справедливо энергетическое неравенство

$$\| L^* v \|_{W^{-1,0}_{\Gamma_3}(\Omega)} \geqslant \alpha^* \| v \|_{W^{1,0}_{\Gamma_3}(\Omega)} \quad \forall v \in W^{2,1}_{\tilde{\Gamma}^*}(\Omega) \cap W^{1,0}_{\Gamma_3}(\Omega), \tag{16}$$

где α^* *— некоторая положительная постоянная, не зависящая от* v.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Если существуют такие функции* $\lambda_i = \lambda_i(x_i) \in C(\bar{\Omega})$, $i = m+1, \ldots, n$, *что*

$$\left| \sum_{i=m+1}^n b^i(x)\,\lambda_i(x_i) \right| > 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \tag{17}$$

то функции ω *и* ω^*, *удовлетворяющие соответственно условиям* (10), (15), *существуют.*

Доказательство. Пусть $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — некоторая точка в области Ω и

$$\beta = \operatorname{sign} \left[\sum_{i=m+1}^n b^i(x)\,\lambda^i(x_i) \right], \qquad x \in \bar{\Omega}.$$

Легко проверить, что функции

$$\omega(x_{m+1}, \ldots, x_n) = -\exp \left[\beta t \sum_{i=m+1}^n \int_{x_i^0}^{x_i} \lambda_i(z_i)\,dz_i \right], \tag{18}$$

$$\omega^*(x_{m+1}, \ldots, x_n) = -\exp \left[-\beta t \sum_{i=m+1}^n \int_{x_i^0}^{x_i} \lambda_i(z_i)\,dz_i \right], \tag{19}$$

при достаточно большом положительном t удовлетворяют соответственно условиям (10) и (15).

С учетом лемм 1—3 по стандартной методике [7] доказывается теорема.

Теорема 1. *Если выполнено условие леммы* 3, *то для любой функции* $f(x) \in L_2(\Omega)$ *существует слабое решение* $u(x) \in W^{1,0}_{\Gamma_3}(\Omega)$ *задачи* (5), (6), *а сильное решение, если существует, то единственно. Кроме того, существует полусильное решение задачи* (5), (6).

Терминология теоремы 1 соответствует терминологии [7].

Рассмотрим вопрос о существовании обобщенных решений задачи (5), (6) из пространства $L_p(\Omega)$.

Лемма 4. *Если выполнено условие леммы* 3, *то для любого* $p > 1$ *существуют такие функции* $\omega(x) \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$, $\omega^*(x) \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$ *что*

$$\omega < 0, \quad L^*\omega + (p-1)\,c\omega > 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}, \tag{20}$$

$$\omega^* < 0, \quad L\omega^* + (p-1)^{-1} c^* \omega^* > 0 \quad \text{в } \bar{\Omega}. \tag{21}$$

Доказательство. Легко проверить, что функции (18), (19) при достаточно большом положительном t удовлетворяют соответственно условиям (20) и (21).

Обозначим через V множество всех функций $v(x) \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль на $\tilde{\Gamma}^*$.

Определение. Функцию $u(x) \in L_p(\Omega)$ будем называть обобщенным решением из $L_p(\Omega)$ задачи (5), (6), если выполняется равенство

$$\int_\Omega vf dx = \int_\Omega uL^* v dx \quad \forall v \in V. \tag{22}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие леммы 3, то для любого $p > 1$ и любой функции $f(x) \in L_p(\Omega)$ существует обобщенное решение $u(x)$ из $L_p(\Omega)$ задачи* (5), (6), *удовлетворяющее неравенству*

$$\inf_{u_0 \in Z} \| u + u_0 \|_{L_p(\Omega)} \leqslant \mu \| f \|_{L_p(\Omega)}, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{23}$$

где Z — множество функций из $L_p(\Omega)$, удовлетворяющих условию $\int_\Omega u_0 L^* v dx = 0 \ \forall v \in V$.

Теорема 2 — следствие леммы 4 и результатов работы [1].

Замечание. В качестве примеров уравнений, для которых всегда выполнено условие леммы 3, можно привести уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова [8]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a^{ij}(x,t) P(x,t)] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [b^i(x,t) P(x,t)] \tag{24}$$

и уравнение Понтрягина [8]

$$\frac{\partial}{\partial t} p_\gamma(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p_\gamma(x,t) + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} p_\gamma(x,t), \tag{25}$$

в которых матрица диффузии $\{a^{ij}(x,t)\}$ неотрицательно определена, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geqslant 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка.— Математика. (Период. сб. перев. иностр. статей), 1963, **7**, № 6, с. 99—121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнение второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— В кн.: Математический анализ. 1969. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР), М., 1971, с. 7—252.
3. Пискунов Н. С. Краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа.— Мат. сб., 1940, 7, № 3, 385—421.
4. Генчев Т. Г. Об ультрапараболических уравнениях.— ДАН СССР, 1963, **151**, № 2, с. 265—268.
5. Ильин А. М. Об одном классе ультрапараболических уравнений.— ДАН СССР, 1964, **159**, № 6, с. 1214—1217.
6. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н. Обобщенная задача Коши для ультрапараболического уравнения.— Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967, **31**, № 6, с. 1341—1360.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.
8. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы.— М.: Советское радио, 1977.— 488 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
23.VI 1978 г.