УДК 517.928.5

Н. Г. Панфилов

О многоточечных краевых задачах для линейных систем дифференциальных сингулярно возмущенных уравнений

В данной работе, опираясь на интегральную оценку фундаментального решения, полученную в работе [1], изучим многоточечную краевую задачу для линейной системы.

Рассмотрим сначала трехточечную краевую задачу

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)\,x + f(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$R(x(t_0, \varepsilon),\ x(0, \varepsilon), x(T, \varepsilon)) = 0, \tag{2}$$

где $A(t)$ — непрерывная квадратная матрица $(n \times n)$, $f(t)$ — непрерывный вектор $(n \times 1)$, R — вектор-функция $(n \times 1)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, t_0 — некоторая фиксированная точка из интервала $(0, T)$.

В дальнейшем под нормами вектора и матрицы будем понимать величины $|x| = \max\limits_i |x_i|$, $|A| = \max\limits_i \sum\limits_k |a_{ik}|$. Запись $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\alpha(\varepsilon)$ — матричная функция от ε, будет означать существование такой константы $K > 0$, что $|\alpha(\varepsilon)| \leqslant K\varepsilon^N$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Нетрудно видеть, что непрерывность матрицы $A(t)$ обеспечивает непрерывность ее собственных значений $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, а следовательно, и непрерывность функций $P(t) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i(t)$, $p(t) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re} \lambda_i(t)$, $t \in [0, T]$.

Введем множество E_{t_0}: $E_{t_0} = \{t: 0 \leqslant t < t_0,\ p(t) > 0,\ \int\limits_t^s p(y)\,dy > 0$ при $t < s \leqslant t_0\} \cup \{t: t_0 < t \leqslant T,\ P(t) < 0,\ \int\limits_s^t P(y)\,dy < 0$ при $t_0 \leqslant s < t\}$.

Определение. Систему (1) назовем интегрально устойчивой относительно точки $t_0 \in (0, T)$, если множество E_{t_0} не пусто.

Предположим, что система (1) интегрально устойчива относительно точки t_0, указанной в (2), и точки $t = 0$, $t = T$ принадлежат множеству E_{t_0}.

Будем искать решение задачи (1), (2) как решение некоторой задачи Коши с начальным условием в точке $t = t_0$

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0 + \ldots + \varepsilon^k x_k + \ldots, \tag{3}$$

имеющем на множестве E_{t_0} асимптотическое разложение

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \ldots + \varepsilon^k \bar{x}_k(t) + \ldots, \quad t \in E_{t_0}. \tag{4}$$

Из определения множества E_{t_0} следует, что $\det A(t) \neq 0$ для $t \in E_{t_0}$. Поэтому, подставляя (4) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем формулы для определения $\bar{x}_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$,

$$\begin{aligned} &A(t)\,\bar{x}_0(t) + f(t) = 0, \quad \bar{x}_0(t) = -A^{-1}(t)\,f(t), \quad t \in E_{t_0}, \\ &A(t)\,\bar{x}_k(t) = \dot{\bar{x}}_{k-1}(t) \quad \bar{x}_k(t) = A^{-1}(t)\,\dot{\bar{x}}_{k-1}(t), \quad k \geqslant 1, \quad t \in E_{t_0}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (3), (4) в (2) и разлагая левую часть по степеням ε, получаем

$$R_0 + \ldots + \varepsilon^k R_k + \ldots = 0, \tag{6}$$

где R_k — функция от $x_0, \ldots, x_k$. Из (6) получаем уравнения для определения $x_0, x_1, \ldots$

$$R_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Для $k = 0$ имеем

$$R_0 \equiv R(x_0, \bar{x}_0(0), \bar{x}_0(T)) = 0. \tag{8}$$

1. Пусть система (8) относительно x_0 имеет решение $x_0 = x_0^0$ и функциональный определитель $D(R_0)/D(x_0)|_{x_0 = x_0^0} \neq 0$.

2. Предположим, что $A(t)$, $f(t)$ $(N + 1)$ раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$, а R обладает $(N + 2)$-мя непрерывными производными в окрестности точки $(x_0^0, \bar{x}_0(0), \bar{x}_0(T))$.

Нетрудно видеть, что условия 1, 2, позволяют из (5), (7) определить $\bar{x}_k(t),\ t \in E_{t_0};\ x_k = x_k^0,\ k = 0, \ldots, N$.

Обозначим $X_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \bar{x}_k(t), \quad t \in E_{t_0}; \quad (x^0)_N = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k x_k^0$.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *интегрально устойчива относительно точки* $t_0 \in (0, T)$, *точки* $t = 0,\ t = T$ *принадлежат множеству* E_{t_0} *и выполнены условия* 1, 2. *Тогда для достаточно малых* ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ *существует единственный вектор* $X_0(\varepsilon)$ *такой, что* $(x^0)_N - X_0(\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *и решение системы* (1), *удовлетворяющее условию* $x(t_0, \varepsilon) = X_0(\varepsilon)$, *является решением задачи* (1), (2). *При этом*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-N} [x(t, \varepsilon) - X_N(t, \varepsilon)] = 0, \text{ если } t \in E_{t_0}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $x(t, \varepsilon, x^0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию

$$x(t_0, \varepsilon, x^0) = x^0, \tag{10}$$

где x^0 — любой фиксированный вектор.

Докажем представление

$$D(R(x^0, x(0, \varepsilon, x^0), x(T, \varepsilon, x^0)))/D(x^0) = D(R(x^0, \bar{x}_0(0), \bar{x}_0(T)))/D(x^0) + O(\varepsilon). \tag{11}$$

Элементы определителя, стоящего в левой части (11),— величины

$$R_1 + R_2 \frac{\partial x(0, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0} + R_3 \frac{\partial x(T, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0}, \tag{12}$$

где R_1, R_2, R_3 — производные вектор-функции R по компонентам x^0, $x(0, \varepsilon, x^0)$, $x(T, \varepsilon, x^0)$ соответственно в точке $(x^0, x(0, \varepsilon, x^0), x(T, \varepsilon, x^0))$.

Докажем следующие оценки для достаточно малых ε:

$$|x(T, \varepsilon, x^0) - \bar{x}_0(T)| \leqslant K\varepsilon, \quad K > 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{13}$$

$$\left| \frac{\partial x(T, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0} \right| \leqslant K \exp\left[-\frac{\varkappa (T - t_0)}{2\varepsilon} \right], \quad K > 0, \quad \varkappa > 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{14}$$

Замечание. В оценках типа (13), (14), где величина констант для нас не существенна, будем пользоваться одними и теми же символами K и $\varkappa$.

Так как $T \in E_{t_0}$ и функция $P(t)$ непрерывна, то найдется такое $h > 0$, что $T - h > t_0$, $[T - h, T] \subset E_{t_0}$.

Определим на отрезке $[t_0, T]$ функцию $\bar{\bar{x}}_0(t)$, имеющую на $[t_0, T]$ непрерывную производную, и для которой $\bar{\bar{x}}_0(t) = \bar{x}_0(t)$ при $t \in [T - h, T]$.

Очевидно, что такую функцию легко построить. При этом разность $\Delta(t, \varepsilon, x^0) = x(t, \varepsilon, x^0) - \bar{\bar{x}}_0(t)$ — решение задачи Коши

$$\varepsilon \dot{\Delta} = A(t) \Delta + r(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0, T], \tag{15}$$

$$\Delta(t_0, \varepsilon) = x^0 - \bar{\bar{x}}_0(t_0), \tag{16}$$

где $r(t, \varepsilon) = f(t) + A(t) \bar{\bar{x}}_0 - \varepsilon \dot{\bar{\bar{x}}}_0$.

По построению ясно, что $|r(t, \varepsilon)| < K < \infty$ при $t \in [t_0, T]$, $|r(t, \varepsilon)| < K\varepsilon\ (0 < K < \infty)$ при $t \in [T - h, T]$.

В работе [1] получена следующая оценка фундаментальной матрицы $X(t, s, \varepsilon)$ $(X(s, s, \varepsilon) = E)$ системы (15):

$$|X(t, s, \varepsilon)| \leqslant K_\sigma \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t [P(y)+\sigma]\, dy\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{17}$$

где $\sigma > 0$ — любое малое число. По условию теоремы $T \in E_{t_0}$ и $P(T) < 0$, поэтому в силу непрерывности $P(t)$ существует положительное число $\varkappa = \varkappa(T) > 0$, определяемое соотношением $-\varkappa = \sup\limits_{t_0 \leqslant s < T} \frac{1}{T-s}\int_s^T P(y)\, dy$, $\varkappa > 0$, откуда

$$\frac{1}{T-s}\int_s^T P(y)\, dy \leqslant -\varkappa, \quad \int_s^T P(y)\, dy \leqslant -\varkappa(T-s),$$

$$\int_s^T [P(y)+\sigma]\, dy \leqslant -(\varkappa-\sigma)(T-s).$$

Положив в (17) $t = T$ и $\sigma = \frac{\varkappa}{2}$, найдем

$$|X(T, s, \varepsilon)| \leqslant K \exp\left[-\frac{\varkappa}{2\varepsilon}(T-s)\right], \quad t_0 \leqslant s \leqslant T. \tag{18}$$

Используя (18), оцениваем величину $|\Delta(T, \varepsilon)|$, считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым:

$$|\Delta(T, \varepsilon)| = \left| X(T, t_0, \varepsilon)(x^0 - \overline{\overline{x}}_0(t_0)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^T X(T, s, \varepsilon)\, r(s, \varepsilon)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \exp\left[-\frac{\varkappa}{2\varepsilon}(T-t_0)\right] + \frac{K_2}{\varepsilon}\int_{t_0}^{T-h} \exp\left[-\frac{\varkappa(T-s)}{2\varepsilon}\right] ds +$$

$$+ \frac{K_3}{\varepsilon}\int_{T-h}^T \exp\left[-\frac{\varkappa(T-s)}{2\varepsilon}\right] \varepsilon ds \leqslant K_1 \exp\left[-\frac{\varkappa}{2\varepsilon}(T-t_0)\right] +$$

$$+ \frac{K_2(T-h-t_0)}{\varepsilon} \exp\left[-\frac{\varkappa h}{2\varepsilon}\right] + \frac{K_3 2\varepsilon}{\varkappa}.$$

Отсюда $|\Delta(T, \varepsilon)| \leqslant K\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Оценка (13) доказана. Докажем оценку (14). Матричная функция $\frac{\partial x(t, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0}$ — решение задачи Коши

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right) = A(t)\frac{\partial x}{\partial x^0}, \quad t \in [t_0, T], \tag{19}$$

$$\frac{\partial x(t_0, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0} = E. \tag{20}$$

Из (19), (20) и (18) можно получить оценку (14).

Рассматривая решение задачи Коши (1), (10) слева от точки t_0, т. е. на отрезке $[0, t_0]$, и совершая простую замену t на $t_0 - t$, аналогичными рассуждениями получаем оценки

$$|x(0, \varepsilon, x^0) - \bar{x}_0(0)| \leqslant K\varepsilon, \quad K > 0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{21}$$

$$\left|\frac{\partial x(0, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0}\right| \leqslant K \exp\left[-\frac{\varkappa t_0}{2\varepsilon}\right], \quad K > 0, \ \varkappa > 0, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{22}$$

Из (13), (14), (21), (22) и условия 2 видно, что (12) имеет представление

$$R_1 + R_2 \frac{\partial x(0, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0} + R_3 \frac{\partial x(T, \varepsilon, x^0)}{\partial x^0} = \frac{\partial R(x^0, \bar{x}_0(0), x_0(T))}{\partial x^0} + O(\varepsilon). \tag{23}$$

Из равенства (23) вытекает (11).

Исходя из (11) и применяя метод работы [2], для достаточно малых ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ можно доказать существование такого вектора $X_0(\varepsilon)$, для которого решение $x(t, \varepsilon, X_0(\varepsilon))$ системы (1) будет удовлетворять условию (2) и при этом $|(x^0)_N - X_0(\varepsilon)| \leqslant K\varepsilon^{N+1}$, $K > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Аналогично доказательству неравенств (13), (21) для любого $t \in E_{t_0}$ можно доказать выражение (9). Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что если система (8) имеет несколько решений, то задача (1), (2) может иметь несколько решений указанного в теореме 1 типа.

Можно доказать следующее следствие.

С л е д с т в и е. *Для любого замкнутого подмножества E^* множества E_{t_0} существуют такие $\varepsilon_0 > 0$, $K > 0$, что*

$$|x(t, \varepsilon) - X_N(t, \varepsilon)| \leqslant K\varepsilon^{N+1} \ \textit{при} \ t \in E^*, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Пусть теперь вместо (2) заданы многоточечные краевые условия

$$R(x(t_0, \varepsilon), \ldots, x(t_m, \varepsilon)) = 0, \tag{24}$$

где R — вектор-функция $(n \times 1)$. Предположим, что система (1) интегрально устойчива относительно некоторой точки t_j, где $0 \leqslant j \leqslant m$ и $\bigcup\limits_{k \neq j}^{m} t_k \subset E_{t_j}$. Если $j \neq 0$, то, переобозначая точки t_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$, можем считать, что система (1) интегрально устойчива относительно точки t_0 и $\bigcup\limits_{k=1}^{m} t_k \subset E_{t_0}$.

Решение задачи (1), (24) опять ищется как решение задачи Коши (1), (3), имеющее на E_{t_0} асимптотическое разложение (4). Из (5) формально определяются $\bar{x}_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, для $t \in E_{t_0}$.

Потребуем, как и выше, выполнения двух условий.

1′. Система

$$R_0 \equiv R(x_0, \bar{x}_0(t_1), \ldots, \bar{x}_0(t_m)) = 0$$

относительно x_0 имеет решение $x_0 = x_0^0$ и функциональный определитель $D(R_0)/D(x_0)|_{x_0 = x_0^0} \neq 0$.

2′. $A(t)$ и $f(t)$ — $(N + 1)$ раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$, а R обладает $(N + 2)$ непрерывными производными в окрестности точки $(x_0^0, \bar{x}_0(t_1), \ldots, \bar{x}_0(t_m))$.

Условия 1′, 2′ позволяют определить $\bar{x}_k(t)$ при $t \in E_{t_0}$, $x_k = x_k^0$, $k = 0, \ldots, N$.

Обозначим

$$X_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k \bar{x}_k(t), \quad t \in E_{t_0}, \quad (x^0)_N = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k x_k^0.$$

Рассуждая точно так же, как и выше, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1'. *Пусть система* (1) *интегрально устойчива относительно точки* $t_0 \in (0, T)$, $\bigcup_{k=1}^{m} t_k \subset E_{t_0}$ *и выполнены условия* 1', 2'. *Тогда для достаточно малых* ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ *существует единственный вектор* $X_0(\varepsilon)$ *такой, что*

$$(x^0)_N - X_0(\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

и решение системы (1), *удовлетворяющее условию* $x(t_0, \varepsilon) = X_0(\varepsilon)$, *является решением задачи* (1), (24). *При этом*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-N} [x(t, \varepsilon) - X_N(t, \varepsilon)] = 0 \text{ при } t \in E_{t_0}.$$

Для любого замкнутого подмножества E^* *множества* E_{t_0} *существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$, $K > 0$, *что*

$$|x(t, \varepsilon) - X_N(t, \varepsilon)| \leqslant K\varepsilon^{N+1} \text{ при } t \in E^*, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рожков В. И. Асимптотика решений некоторых систем с малым параметром при производной.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 6, с. 1037—1049.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
3. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.— 252 с.

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы

Поступила в редакцию 26.VI 1978 г.,
после переработки.— 13.XI 1978 г.