УДК 517.946+511

В. Н. Полищук, Б. И. Пташник

Периодические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

В данной статье обобщаются результаты работы [1] на случай общих систем дифференциальных уравнений в частных производных n-го порядка ($n \geqslant 1$) с постоянными действительными коэффициентами. Устанавливаются условия существования и единственности периодических решений указанных систем.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_p)$; $s = (s_1, \ldots, s_p)$; $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$; $k = (k_1, \ldots, k_p)$; $|s| = s_1 + \ldots + s_p$; $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $\|k\|_\omega^2 = \left(\frac{2\pi k_1}{\omega_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2\pi k_p}{\omega_p}\right)^2$; $D = \{0 \leqslant x_l \leqslant$

$\leqslant \omega_l;\ l = \overline{1, p}\}$; $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$; $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$; $u_k = (u_{k1}, \ldots, u_{km})$; $f_k = (f_{k1}, \ldots, f_{km})$; H_q $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ — гильбертово пространство ω-периодических действительнозначных функций

$$v(x) = \sum_k v_k \exp\left(2\pi i \sum_{l=1}^{p} \frac{k_l x_l}{\omega_l}\right), \quad (v_{-k} = \bar{v}_k),$$

со скалярным произведением, индуцирующим норму

$$\| v \|_q^2 = (v, v)_q = \omega_1 \ldots \omega_p \sum_{|k| \geqslant 0} \{1 + \| k \|_\omega^2\}^q \, | v_k |^2;$$

$\overline{H}_q$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ — гильбертово пространство вектор-функций $u(x)$ $(u_l(x) \in H_q,\ l = \overline{1, m})$ с нормой

$$\| u(x) \|_{\overline{H}_q}^2 = (u, u)_{\overline{H}_q} = \sum_{l=1}^{m} \| u_l \|_q^2 .$$

Функцию $v(x)$ считаем ω-периодической, если она периодическая по каждой переменной $x_1, \ldots, x_p$ с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_p$ соответственно. Пространство H_q $(q \geqslant 0)$ — пространство ω-периодических функций, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные производные до порядка q включительно [2].

1. Для системы дифференциальных уравнений

$$L[u(x)] \equiv \sum_{|s| \leqslant n} A_s \frac{\partial^{|s|} u(x)}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f(x), \tag{1}$$

где A_s — $m \times m$-матрицы с постоянными действительными элементами, $f(x) \in \overline{H}_N$ (N — достаточно большое натуральное число), рассматриваем задачу о нахождении ω-периодических решений, принадлежащих пространству $\overline{H}_q$ $(q \geqslant n)$. При $q = n$ искомое решение — решение почти всюду, а при $q = n + \left[\frac{p}{2}\right] + 1$ — классическое.

Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k \exp\left(2\pi i \sum_{l=1}^{p} \frac{k_l x_l}{\omega_l}\right). \tag{2}$$

Для определения каждого вектора u_k получаем систему алгебраических уравнений

$$M_k(u_k) \equiv \sum_{|s| \leqslant n} A_s (2\pi i)^{|s|} \left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{k_p}{\omega_p}\right)^{s_p} u_k = f_k, \tag{3}$$

где f_k $(|k| \geqslant 0)$ — коэффициенты Фурье вектор-функции $f(x)$. Определитель $\Delta(k)$ системы (3) равен:

$$\Delta(k) = \sum_{|r| \leqslant mn} B_r (2\pi i)^{|r|} \left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^{r_1} \ldots \left(\frac{k_p}{\omega_p}\right)^{r_p}, \tag{4}$$

где

$$B_r = \sum_{\sum\limits_{l=1}^{m} s_\nu^{(l)} = r_\nu \ (\nu = \overline{1, p})} \det \| a_{s^{(l)}}^{jl} \|_{j, l = \overline{1, m}}, \tag{5}$$

$a_s^{jl}(l)$ $(j=\overline{1,m})$ — элементы l-го столбца какой-либо из матриц A_s $(|s|\leqslant n)$, $s_\nu^{(l)}$ — ν-ая компонента мультииндекса s этой матрицы.

Заметим, что при $k=(0)$ система (3) имеет единственное решение, когда $B_{(0)}=\det A_{(0)}\neq 0$. В противном случае соответствующая однородная система имеет $m-R$ линейно независимых нетривиальных решений, где $R=\operatorname{rang} A_{(0)}<m$, а решение $u_{(0)}$ системы (3) существует тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} A_{(0)}=\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} a_{(0)}^{11}\ldots a_{(0)}^{1m}\, f_{(0)1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{(0)}^{m1}\ldots a_{(0)}^{mm}\, f_{(0)m}\end{matrix}\right\|. \tag{6}$$

2. Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи.

Теорема 1. *Если* $\det A_{(0)}\neq 0$, *то для единственности решения системы* (1) *в пространстве* $\overline{H}_n$ *необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$\sum_{|r|\leqslant mn} B_r\,(2\pi i)^{|r|}\left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^{r_1}\ldots\left(\frac{k_p}{\omega_p}\right)^{r_p}=0 \tag{7}$$

не имело решений в целых числах $k_1,\ldots,k_p$.

Доказательство. Необходимость. Если уравнение (7) имеет целочисленное решение $k^0=(k_1^0,\ldots,k_p^0)$, то система

$$L[u(x)]=0 \tag{1*}$$

имеет нетривиальные ω-периодические решения вида

$$u^0(x)=u_{k^0}\exp\left(2\pi i\sum_{l=1}^{p}\frac{k_l^0x_l}{\omega_l}\right),$$

где u_{k^0} — решение однородной системы

$$M_k(u_k)=0 \tag{3*}$$

при $k=k^0$. Тогда решение системы (1) из $\overline{H}_n$, если оно существует, не будет единственным.

Достаточность. Пусть существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ системы (1) из $\overline{H}_n$. Тогда $u(x)=u_1(x)-u_2(x)\in\overline{H}_n$ и почти всюду удовлетворяет системе (1*), т. е. $u(x)$ представляется рядом вида (2) и $\int_D\{L[u(x)]\}_l^2\,dx=0$, $l=\overline{1,m}$. Из равенств Парсеваля для функций $\{L[u(x)]\}_l$ $(l=\overline{1,m})$ — компонент вектора $L[u(x)]$ — следует, что каждый коэффициент Фурье u_k вектор-функции $u(x)$ — решение соответствующей системы уравнений (3*). Если уравнение (7) не имеет решений в целых числах $k_1,\ldots,k_p$, то $u_k=(0)$ для всех целочисленных векторов k, т. е. $\|u(x)\|_{\overline{H}_n}\equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\det A_{(0)}=0$. *Для того, чтобы два решения системы* (1) *из* $\overline{H}_n$ *отличались лишь на аддитивный постоянный вектор, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (7) *не имело нетривиальных решений в целых числах* $k_1,\ldots,k_p$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

3. Если уравнение (7) не имеет нетривиальных решений в целых числах $k_1,\ldots,k_p$, то для каждого вектора $k\neq(0)$ система (3) имеет единственное решение, определяемое формулами

$$u_{kj}=\sum_{l=1}^{m}(-1)^{j+l}\,f_{kl}\,\frac{\Delta_{lj}(k)}{\Delta(k)},\quad j=\overline{1,m}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_{lj}(k)=\sum_{|r|\leqslant n(m-1)} b_r^{lj}(2\pi i)^{|r|}\left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{k_p}{\omega_p}\right)^{r_p}, \tag{9}$$

$$b_r^{lj}=\sum_{\sum\limits_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq j}}^{m} s_\nu^{(\sigma)}=r_\nu(\nu=\overline{1,p})} \det\| a_{s(\sigma)}^{\alpha\sigma}\|_{\substack{\alpha,\sigma=\overline{1,m}\\ \alpha\neq l;\sigma\neq j}}, \tag{10}$$

$a_{s(\sigma)}^{\alpha\sigma}$ $(\alpha=\overline{1,m})$ — элементы σ-го столбца какой-либо из матриц A_s $(|s|\leqslant n)$, $s_\nu^{(\sigma)}$ — ν-ая компонента мультииндекса s этой матрицы.

Легко видеть, что

$$|\Delta_{lj}(k)|\leqslant c\,|k|^{n(m-1)},\quad l,j=\overline{1,m}, \tag{11}$$

где $c>0$ — константа, не зависящая от k.

Определитель $\Delta(k)$ (см. формулу (4)), будучи отличным от нуля, может становиться как угодно малым для бесконечного множества целочисленных векторов k. Поэтому вопрос о существовании ω-периодических решений системы (1) связан с проблемой малых знаменателей.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\det A_{(0)}\neq 0$ *и существуют константа* $M>0$ *и натуральное число* γ *такие, что неравенство*

$$\left|\sum_{|r|\leqslant mn} B_r(2\pi i)^{|r|}\left(\frac{k_1}{\omega_1}\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{k_p}{\omega_p}\right)^{r_p}\right|>M|k|^{-\gamma-\varepsilon},\quad (0<\varepsilon<1), \tag{12}$$

выполняется для всех (кроме конечного числа) векторов с целочисленными координатами. Если $f(x)\in\overline{H}_{q+n(m-1)+\gamma+1}$, *то существует решение системы* (1), *принадлежащее пространству* $\overline{H}_q$ *и корректное относительно векторфункции* $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (2), (8)—(10) и оценок (11), (12) получаем

$$\|u(x)\|_{\overline{H}_q}\leqslant C\|f\|_{\overline{H}_{q+n(m-1)+\gamma+1}};\qquad C=C(m,n,p)>0. \tag{13}$$

Из неравенства (13) следует доказательство теоремы.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\det A_{(0)}=0$ *и пусть выполнены все остальные условия теоремы 3 и условие* (6), *тогда существует решение системы* (1) *из пространства* $\overline{H}_q$, *определяемое с точностью до аддитивного постоянного вектора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 3.

4. Выясним, когда же справедлива оценка (12). Представим выражение определителя $\Delta(k)$ в виде

$$\Delta(k)=\sum_{\substack{|r|=2l\\ 0\leqslant l\leqslant\left[\frac{mn+1}{2}\right]}}\alpha_r k_1^{r_1}\cdots k_p^{r_p}+i\sum_{\substack{|r|=2l-1\\ 1\leqslant l\leqslant\left[\frac{mn+1}{2}\right]}}\beta_r k_1^{r_1}\cdots k_p^{r_p}, \tag{14}$$

где $\alpha_r=(-1)^l B_r\dfrac{(2\pi)^{|r|}}{\omega_1^{r_1}\ldots\omega_p^{r_p}},\quad |r|=2l,\quad 0\leqslant l\leqslant\left[\dfrac{mn+1}{2}\right],$

$$\beta_r=(-1)^{l+1}B_r\frac{(2\pi)^{|r|}}{\omega_1^{r_1}\ldots\omega_p^{r_p}},\quad |r|=2l-1,\quad 1\leqslant l\leqslant\left[\frac{mn+1}{2}\right],$$

а величины B_r $(|r|\leqslant mn)$ определены формулами (5).

Очевидно, что

$$|\Delta(k)| \geqslant \max \left\{ \left| \sum_{\substack{|r|=2l \\ 0 \leqslant l \leqslant \left[\frac{mn+1}{2}\right]}} \alpha_r k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p} \right|; \quad \left| \sum_{\substack{|r|=2l-1 \\ 1 \leqslant l \leqslant \left[\frac{mn+1}{2}\right]}} \beta_r k_1^{r_1} \ldots k_p^{r_p} \right| \right\}.$$

Обозначим соответственно через α и β векторы, составленные из всех коэффициентов α_r и β_r, а через Q_α и Q_β — число компонент этих векторов.

Теорема 5. *Если $\gamma \geqslant p$, то неравенство* (12) *выполняется для почти всех (в смысле меры Лебега в R^{Q_α}) векторов α (и для всех β) или для почти всех (в смысле меры Лебега в R^{Q_β}) векторов β (и для всех α) при $|k| > K(\alpha, \beta)$.*

Если $\det A_{(0)} \neq 0$, доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5 работы [3]; если $\det A_{(0)} = 0$, доказательство теоремы следует из теоремы 16 работы [4].

Рассмотрим еще одну оценку снизу определителя $\Delta(k)$ для частного случая, когда система (1) имеет вид

$$\sum_{|s| \leqslant n} A_s \frac{\partial^{2|s|} u(x)}{\partial x_1^{2s_1} \ldots \partial x_p^{2s_p}} = f(x), \tag{15}$$

где $\det A_s \neq 0$ хотя бы для одного из мультииндексов $s = (n, 0, \ldots, 0)$, $(0, n, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, n)$; не ограничивая общности, будем считать, что $\det A_{(n,0,\ldots,0)} \neq 0$.

Определитель $\Delta(k)$ можно представить в виде

$$\Delta(k) = (-k_1^2)^{mn} [q_1^{mn} \det A_{(n,0,\ldots,0)} + P(k, q_1, \ldots, q_p)], \tag{16}$$

где $q_j = \left(\frac{2\pi}{\omega_j}\right)^2$, $j = \overline{1, p}$; $P(k, q_1, \ldots, q_p)$ — полином относительно переменных $q_1, \ldots, q_p$, степень которого по q_1 не превышает $mn - 1$.

Теорема 6. *В случае системы* (15) *неравенство*

$$|\Delta(k)| > M |k|^{-\gamma-\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon < 1, \quad M > 0, \tag{17}$$

при $\gamma \geqslant mn(p-1)$ выполняется для почти всех (в смысле меры Лебега в R^p) векторов $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p)$ при $|k| > K(\omega)$.

Доказательство теоремы можно провести, используя методику доказательства теоремы 2 работы [5].

Результаты настоящей работы переносятся на случай, когда коэффициенты системы (1) — комплексные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полищук В. Н., Пташник Б. И. Периодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 3, с. 326—333.
2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1966.— 351 с.
3. Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, **13**, № 4, с. 637—645.
4. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений.— М.: Наука, 1977.— 143 с.
5. Берник В. И., Пташник Б. И. Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 3, с. 441—417.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редакцию
15.VIII 1978 г.